Niels Jacob Hansen, Mikael Skånstrøm og Kirsten Søs Spahn

Matematik med it

Lærervejledning 2

Forlaget Matematik

Matematik med it

2

Lærervejledning

Forlaget Matematik

Niels Jacob Hansen, Mikael Skånstrøm,
Kirsten Søs Spahn

Indhold

Bogen udgives med støtte fra
A. P. Møller og Hustru Chastine McKinney Møllers Fond
til almene Formaal

Forord

Foto: Jørgen Uhl Pedersen

Matematik med it er en videreførelse af et tidligere projekt med samme navn. Projektets formål er efteruddannelse af matematiklærerne i grundskolen.

I forbindelse med det første projekt udgav Danmarks Matematiklærerforening grundbogen *Matematik med it*[1], som i otte artikler beskriver forskellige aspekter ved brug af it i matematikundervisningen.

Til anden del af projektet, som Gladsaxe Kommune står for med støtte fra A. P. Møller og Hustru Chastine McKinney Møllers Fond til almene Formaal, hører *Matematik med it · Elevbog 1* og *Matematik med it · Elevbog 2* med tilhørende lærervejledninger, som er udviklet af Danmarks Matematiklærerforening. Denne del af projektet viderefører efteruddannelsen gennem to elevbøger, der indeholder eksemplariske undervisningsforløb med brug af it-værktøjer og de to lærervejledninger, der indeholder didaktiske og metodiske overvejelser. Bøgerne dækker mellemtrin og ældste trin i grundskolen.

Indledning

Matematik med it · Elevbog 2 henvender sig til elever i udskolingen, men vil også kunne bruges i sidste del af mellemtrinnet. Bogen indeholder 16 opslag, hvor der er fokus på brug af it med særligt fokus på arbejdet med CAS. Oplæggene er konstrueret så de kan anvendes uafhængigt af, hvilket CAS-værktøj eleverne har til rådighed.

De digitale værktøjer bruger eleverne i deres undersøgende arbejde med matematik. Arbejdet tager ofte udgangspunkt i problemstillinger fra det omgivende samfund, der kan være interessante for eleverne at undersøge. Eleverne skal arbejde ud fra en problemløsende tilgang, hvilket betyder, at de opfordres til at afsøge flere mulige veje i processen. De vil så opdage, at der kan være flere løsninger til samme problemstilling. Oplæggene lægger op til, at eleverne bruger et CAS-værktøj i arbejdet med at opstille og undersøge matematiske modeller. Modellerne kan indeholde variable, som eleverne kan ændre. Dermed kan de ændre på modellernes forudsætninger og dermed også resultaterne.

CAS i matematikundervisningen

CAS er en forkortelse af Computer Algebra System. Et CAS-værktøj kan bruges til at arbejde med opgaver, der indeholder variable, at løse ligninger, at håndtere tal med mange betydende cifre og at håndtere store datasæt. CAS-værktøjet kan desuden præsentere resultater i grafer, diagrammer og tabeller. Det betyder, at en del af de opgaver, som eleverne arbejder med, kan løses af programmet, hvis eleverne taster de korrekte oplysninger ind. CAS-værktøjet er i denne sammenhæng en form for avanceret lommeregner. Det er imidlertid CAS-værktøjet

- som hjælp for eleverne til at udforske strategi og metoder
- som hjælp til præsentation af resultater
- og i det hele taget som hjælp til at blive klogere på matematik

der er i fokus.

Det er derfor vigtigt at overveje, hvordan temaerne iscenesættes i undervisningen og hvordan CAS-værktøjet bliver integreret. Nogle af de didaktiske spørgsmål, der bør overvejes i forhold til implementering af CAS-værktøjer er:

- Hvilket indhold skal der være i matematikundervisningen?
- Hvilke typer af opgaver kan være med til at udvikle elevernes matematiske kompetencer, når de arbejder med et CAS-værktøj?
- Hvilke udfordringer kan der opstå, når et CAS-værktøj inddrages i matematikundervisningen?
- Hvordan kan CAS blive et matematisk værktøj, som eleverne kan anvende på en kompetent måde?
- Hvilke evalueringsformer kan vise, hvilken læring og hvilke kompetencer eleverne har opnået?

Indholdet i en undersøgende og dialogisk matematikundervisning vil være præget af at opstille hypoteser, gennemføre undersøgelser og eksperimenter frem for løsning af flere opgaver af samme type. Der vil sandsynligvis forekomme situationer, hvor nogle elever oplever, at de er udfordret i forhold til valg af regnemetode, men her er det vigtigt at stille spørgsmål til eleverne, der kan lede dem frem til en strategi frem for at give dem en metode, som de ukritisk anvender.

Eleverne bør opleve, at matematik er fag, hvor det er positivt at vælge metoder kreativt, også selvom nogle af metoderne senere må opgives. Det er en del af læreprocessen.

Der skal være tid til fordybelse, når eleverne arbejder med problemløsning/modellering, fordi disse processer fordrer undersøgelser, afprøvninger og valg, som i sidste ende skal munde ud i forklaringer, argumenter og evt. ræsonnementer på baggrund af beregninger med et CAS-værktøj.

De udfordringer, der kan opstå i undervisningen, når et CAS-værktøj inddrages, kan være af såvel teknisk som didaktisk karakter. Symbolbehandling har en afgørende rolle i arbejdet med opgaverne i CAS. Det er muligt at bruge meningsfulde variabelnavne, som fx "pris" og "antal" i et CAS-værktøj. Denne måde at bruge variable på gør, at det er muligt at se variabelnavne

Foto: Jørgen Uhl Pedersen

i regneudtryk eller matematiske modeller. Mange af udfordringerne kan også løses ved at bruge et regneark, hvor de variable er cellehenvisninger, og hvor regneudtryk og matematiske modeller er skjulte. Vær opmærksom på, at muligheden for meningsfulde variabelnavne stiller krav til stavemåde, da CAS-værktøjer ikke kan genkende variable, hvis de ikke er skrevet og stavet ens i hele dokumentet. Nogle CAS-værktøjer foreslår dog det korrekte variabelnavn, når blot et eller to bogstaver i et variabelnavn, der tidligere er brugt, indtastes korrekt.

For at CAS kan blive et matematisk værktøj, som eleverne kan anvende på en kompetent måde, er der nogle aspekter, der skal overvejes og tages stilling til:

- Hvordan arbejder vi med at oversætte matematisk syntaks til CAS syntaks?
- Hvilke udfordringer giver syntaksen i CAS-værktøjet?
- Er der repræsentationer, der skal ændres?
- Hvordan fortolker vi resultatet?
- Hvilke holdninger er der til brugen af CAS?
- Hvordan kan vi bruge CAS så kvaliteten af matematikundervisningen øges?

Bogens opbygning

Bogen er opbygget, så hvert emne/tema fylder et opslag. Der er generelt valgt en struktur, så venstre side er tænkt som en del af introduktionen til elevernes undersøgelser på højre side.

Venstresiden lægger op til en fælles introduktion og iscenesættelse af emnet. Eleverne får på den måde kendskab til indholdet, ligesom deres forståelse af både faglige og før-faglige begreber og brug af digitale værktøjer bliver afklaret. Hvis eleverne er i tvivl om centrale begreber, kan det være vanskeligt at opnå en forståelse, der gør, at de er i stand til at arbejde med problemerne. Udover at forstå begreberne, er det vigtigt, at eleverne bruger disse i sammenhæng med en kontekst, så deres matematiske kommunikationskompetence også udvikles. I side til side vejledningerne er der ideer til introduktionen.

Højresiden indeholder opgaver og udfordringer, der tager udgangspunkt i introduktionen på venstresiden. På højre side kommer begreber og brugen af digitale værktøjer i spil i forbindelse med arbejdet med problemstilling og opgaver. Dette bliver uddybet senere i side til side vejledningerne.

Det er muligt at læse mere om procesorienteret matematikundervisning i bogen *Matematik med it* (2016), kapitel 1[2]. Her beskriver Karsten Enggaard, hvordan undervisningen kan organiseres, så processen og dermed udviklingen af matematiske kompetencer er central.

Opslagene i bøgerne har som ovenfor omtalt fokus på, at eleverne skal arbejde med problemløsning og modellering. I arbejdet med problemstillingerne skal eleverne sideløbende arbejde med at lære at anvende CAS som undersøgelsesværktøj. Det er vigtigt, at elevernes arbejde i løsningsprocessen kan tage udgangspunkt i forskellige strategier, og at de løbende kan diskutere og argumentere for deres valg af strategi. På denne måde vil eleverne opleve, at de ikke nødvendigvis kommer frem til samme løsning, selvom de har arbejdet med den samme problemstilling eller opgave. Det vil automatisk ske, når de skal foretage nogle valg i forhold til opgavens problemstilling, eller hvis de bliver spurgt "hvad nu hvis...?". det kan ses tydeligt i opslaget: *Køb af cykel.*

Evaluering

Evaluering af arbejdsprocessen er en udfordring, når eleverne har mange forskellige strategier og løsningsforslag. I evalueringen kan man bruge digitale værktøjer som skærmoptager, audio, video eller fotos suppleret med opsamling af pointer undervejs i undervisningen.

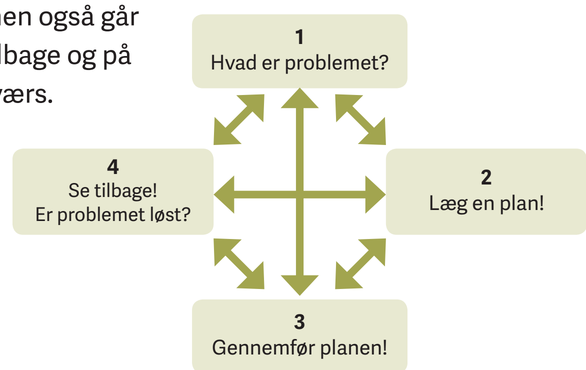
Hvordan kan det give mening at evaluere fx dele af opgave 2 i opslaget *Køb af cykel*? Umiddelbart handler det ikke om, at eleverne afleverer fem eller flere forslag til, hvad der skal købes, hvis de skal finde prisen på cyklen hos de tre forhandlere. En skærmoptagelse med forklaringer fra eleven, der tydeligt viser, at hun har anvendt de muligheder for arbejde med variable, der ligger i CAS-værktøjet, vil være en evaluering, der kan give læreren indsigt i elevens kompetencer i denne sammenhæng. Ved at arbejde med skærmoptagelser tilgodeser læreren også mindst en af de fire elevpositioner, som er beskrevet i det tværgående tema 'It og medier' (Fælles Mål 2014). Det er muligt at læse mere om dette i *Matematik med it* kapitel 3[3], hvor Rikke Teglskov beskriver arbejdet med de fire elevpositioner.

Under elevernes arbejde med et opslag, kan det være frugtbart i fællesskab at opsamle særlige pointer. Det kan være matematiske pointer, pointer fra brug af CAS eller et andet digitalt værktøj eller pointer vedrørende strategier/løsningsforslag. Rammen med overvejelser, der ligger efter opgaverne i alle opslag, er skrevet med henblik på elevrefleksioner. Det er lettest at reflektere over valg af strategi, værktøj og løsning, i umiddelbar forlængelse af arbejdet med opgaverne, mens problemer og pointer er i frisk erindring.

Problemløsning

Nedenstående model giver en oversigt over faser i arbejdet med problemløsning. Modellen kan i en eller anden form præsenteres for eleverne for at støtte dem i processen med problemløsning.

Spørgsmålene/udsagnene til hver fase kan anvendes som stilladsering. Pilene viser, at det både er en mulighed og ofte en nødvendighed, at eleverne ikke udelukkende arbejder fremad efter 1, 2, 3 og 4, men også går tilbage og på tværs.



I **fase 1** arbejder eleverne med at forstå problemet.

1. Hvad bliver du bedt om at finde eller vise?
2. Kan du formulere problemet med dine egne ord?
3. Kan du forestille dig et billede eller et diagram, der kan hjælpe dig til at forstå problemet?
4. Er der information nok til at gøre det muligt for dig at finde en løsning?
   Hvis ja, hvad er så den vigtigste information, du har fået?

I f**ase 2** forsøger eleverne at lægge en plan.

1. Har du mødt problemet i en enklere form?
2. Gæt og prøv efter – måske kan du forbedre noget
3. Tegn et diagram/skitse el.lign.
4. Kig efter en mønster
5. Tegn en tabel
6. Kan problemet forenkles?
7. Opstil en ligning
8. Trevl op bagfra
9. Udeluk muligheder

I **fase 3** arbejder eleverne med planen.

1. Holde øje med sine fremskridt, så alt går efter planen
2. Tjekke hvert trin
3. Huske fejltrin eller særlige overvejelser ift. fremtidig gennemgang
4. Prøve en ny plan, hvis denne ikke lykkes

I **fase 4** ser eleverne tilbage og reflekterer.

1. Er der en metode, du kan bruge, som tillader dig at verificere dit svar?
2. Giver dit svar mening?
3. Kan du sætte dit svar ind i spørgsmålets kontekst?
4. Reflekter og se tilbage på din proces – hvad virkede? Hvad virkede ikke?

It og medier

Som tværgående tema skal it og medier være integreret i alle fag. I matematik kan eleverne arbejde med temaet, når de indsamler og deler information i forhold til de problemer, de skal løse. Det indhold, eleverne skaber i arbejdsprocessen, kan deles med en eller flere kammerater, og kan derved danne grundlag for et læringsfællesskab. De forskellige aspekter ved elevernes arbejde med it og medier i matematik er formuleret i fire punkter, som i forhold til oplægget *Køb af cykel* kan udbygges som vist i det følgende.

1. Eleven som kritisk undersøger.
   - Viden om udgifter til cykeludstyr
   - Regneudtryk
   - Variable
   - Regne/bruge CAS
2. Eleven som analyserende modtager.
   - Beskriver forskellige situationer
   - Diskuterer variable og regnemodeller
3. Eleven som målrettet og kreativ producent.
   - Brug af CAS
   - Screencast med forklaring på model og brug af CAS
   - Dele fx på Skoletube
4. Eleven som ansvarlig deltager.
   - Konstruktiv feedback

Eleven opfylder punkt 3 ved at udarbejde en skærmoptagelse og har i opgaven også været den kritiske undersøger (1), der har fundet informationer om, hvad forskellige ting koster og hvad man evt. kan tjene, hvis man sælger sin gamle cykel. Se evt. en del af en evalueringsoptagelse på dette link[4].

Arbejdet med CAS, problemløsning og modellering i denne bog giver anledning til, at eleverne afprøver forskellige strategier og it-værktøjer. I denne arbejdsproces vil dialogen elev-elev og lærer-elev understøtte læringen og samtidig give anledning til at stille spørgsmål, der lægger op til matematisk samtale. Samtalen er en del af den sproglige udvikling, som desuden indeholder læsning, lytning og faglig skrivning. I bogen lægges der derfor op til, at eleverne skal argumentere og skrive løsningsforslag, og på den måde udvikle såvel deres matematiske kompetencer som deres fagsprog.

---

1) http://brochure.aabc.dk/ventures/matematik-med-it/
2) http://matematikmedit.dk/wp-content/uploads/2016/11/Matematik_med_IT_kapitel1.pdf
3) http://matematikmedit.dk/wp-content/uploads/2016/11/Matematik_med_IT_kapitel3.pdf
4) kortlink.dk/w2st

Opslagsbøger

Formelsamlingen – Matematiske formler og fagord, Forlaget Matematik, 2. udgave 2017.

Gyldendals små opslagsbøger – Matematik, Hans Jørgen Beck, 2. udgave 2009.

Gyldendals Minilex, Matematik, Søren Halse, Erik Laage-Petersen, Jens Peter Touborg, 1. udgave 2005.

Køb af cykel

Introduktion og iscenesættelse af elevernes arbejde
Opslaget relaterer til elevernes virkelighed, når de skal foretage nogle valg. Klassesamtalen kan tage udgangspunkt i elevernes bud på, hvad de har købt, og hvilke valg de måtte foretage, inden de besluttede sig til det endelige køb. Problemstillingen, som eleverne skal arbejde med, giver anledning til, at de kan kommunikere med og om matematik og efterfølgende skal argumentere for de valg, de har foretaget.

Elevernes undersøgende arbejde
Opgave 1 skal give eleverne mulighed for at dykke ned i de forskellige tilbud og få et overblik over de forskellige forhandleres priser. Beregningen af rabatten giver eleverne mulighed for at foretage et begrundet valg senere.

Tegning: Bjørn Rasmussen

Problemstillingen i **opgave 2** er i sammenhæng med opgave 1 grundlag for at vælge tilbud.

Opgave 3 har fokus på, at eleverne anvender et dynamisk værktøj til at finde det tilbud, de mener, er det bedste. Når de har foretaget deres valg, er det vigtigt, at de argumenterer på baggrund af deres beregninger og undersøgelser.

Opgave 4 giver anledning til at arbejde med dynamikken i CAS-værktøjet, når eleverne skal undersøge, hvilke elementer de skal vælge til eller fra for at kunne ændre den anbefaling, de tidligere har givet. Den brugte cykel kommer i sidste del af opgaven til at spille en afgørende rolle for valg af forhandler. Her skal eleverne afgøre, hvor meget Anne-Mette skal forlange for sin brugte cykel, hvis hun vil købe tilbud 2 uden at skulle betale mere end ved et af de andre tilbud.

Fælles opsamling
I den fælles opsamling vil det være oplagt at tale med eleverne om deres valg og fravalg af tilbehør og hvilke konsekvenser, det havde for deres endelige køb. Rabatter af forskellig karakter, afbetaling og mulighed for, at forhandleren betaler noget for den gamle cykel ved køb af ny cykel, er alle forhold, der spiller ind på den endelige pris. Det er vigtigt, at eleverne forholder sig til de forskellige prisreduktioner og de konsekvenser, de kan have. Det vil være oplagt at relatere til andre forhold fra elevernes hverdag, hvor de bliver udsat for at skulle foretage valg og tale om de lånemuligheder, de er omgivet af i medierne.

Brug af digitale værktøjer
Det er en del af opgaven at arbejde med et CAS-værktøj, men det vil være oplagt at diskutere med eleverne, om de har andre forslag til værktøjer, der er oplagte i denne opgave. Fordelene ved at arbejde med dynamiske værktøjer i denne opgave er, at det er muligt at ændre på forskellige priser/valg. Eleverne kan i den situation få hjælp til hurtigt at finde de relevante oplysninger uden af skulle bruge tid på at udarbejde nye beregningsmodeller.

Foto: Colourbox

Fra Skagen til Gedser i bil

Når Google, Garmin, Krak og andre tjenester beregner en rejserute, må der ligge en matematisk model bag de resultater, som bliver til rutevejledningen. Målet her er, at eleverne skal arbejde med kritisk modellering.

Brugen af CAS gør det muligt for eleverne at opstille en model, som de kan bruge til simulering af lignende situationer og sammenligne deres resultat med svaret fra rutevejledningen.

J. P. Valery, Unsplash

Introduktion og iscenesættelse af elevernes arbejde

Hvordan kan man være kommet frem til, at det tager næsten 6 timer at komme fra Skagen til Gedser?
For at svare på dette spørgsmål er det nødvendigt at overveje hvilke forudsætninger den matematiske model, som giver resultatet, bygger på. Klassen drøfter i fællesskab hvilke forhold, der har indflydelse på den tid, det tager at køre en bestemt strækning. Nogle af disse forhold kan eleverne tage med i deres modeller, mens andre forhold er noget vanskeligere at få med. Forhold, der typisk nævnes, er vejtyper, gennemsnitshastighed på de forskellige vejtyper, strækninger med vejarbejde, strækninger med kø, årstid, ugedag og tid på døgnet.

Erfaringsmæssigt er beregninger med tid, vejlængde og hastighed vanskeligt for mange elever. Derfor bør der i den fælles drøftelse i klassen også indgå overvejelser om sammenhængen mellem tid, vejlængde og hastighed.

Arbejdet med brug af CAS er en del af introduktionen. Brug eksemplet på side 6 eller et eksempel fra det CAS-værktøj, som klassen benytter. Denne video[1] giver både en introduktion til arbejdet med modellering og brugen af CAS-værktøjet WIRIS. Overvej om brugen af enheder vil lette eller komplicere arbejdet.

Elevernes undersøgende arbejde

I **opgave 1** skal eleverne arbejde med en systematisering af de variable, der skal indgå i deres model.

I **opgave 2** skal eleverne undersøge hvilke gennemsnitshastigheder, man regner med på forskellige vejtyper. Gennemsnitshastigheden er jo ikke nødvendigvis den samme som hastighedsbegrænsningen. På Vejdirektoratets hjemmeside[2] er det muligt at hente de nødvendige informationer til denne opgave.

Modellen, der beregner tiden, opstiller eleverne i **opgave 3**. Den kan udvides på flere måder, så der fx indgår flere vejtyper.

Den centrale opgave er **opgave 4**, hvor eleverne skal vurdere deres model og bruge den til forskellige simuleringer og til en sammenligning af resultatet fra en app, der beregner rutevejledninger.

Fælles opsamling

Modelleringsprocessen bør have en central plads i den fælles opsamling, selvom den ikke er nævnt som et punkt. De punkter, der er i rammen, knytter sig til det rent tekniske i forhold til enheder og brug af CAS.

Brug af digitale værktøjer

I CAS-eksemplet, der er vist nederst på side 6, har vi valgt at benytte os af, at de fleste CAS-værktøjer gør det muligt at bruge SI-enhederne i beregningerne. Brugen af enheder kan dog komplicere arbejdet for nogle elever. Desuden har forskellige CAS-værktøjer ofte forskellige standarder for angivelse af enheder. Modellen kan også opstilles i et regneark, men fordelen ved at bruge et CAS-værktøj er, at det er muligt at give de variable meningsfulde navne. I et regneark vil de variable være cellenavne, og selve modellen er skjult.

---

1) https://youtu.be/uPFz8qk4wlU
2) https://trafikkort.vejdirektoratet.dk/

At spare op

Tegninger: Bjørn Rasmussen

I dette tema er der fokus på opsparing, og omdrejningspunkterne er på den ene side en klasses opsparing til deres sidste skoledag og på den anden side en opsparing til et kørekort.

I ingen af situationerne er rentebegrebet inddraget, men det kan naturligvis overvejes at tillægge renter til problemstillingen, fx ved at skolen i den ene historie og Sagas morfar i det anden tilbyder 10% i tillæg til opsparingerne.

Introduktion og iscenesættelse af elevernes arbejde

Mon ikke alle elever har prøvet at spare sammen til noget, de ønsker sig?

Tal med eleverne om deres erfaringer med det at spare op. Er det noget de selv gør, eller bidrager deres forældre, og hvordan foregår det i praksis. Der er sikkert en del af eleverne, der har en børneopsparing, hvor forældre eller bedsteforældre bidrager med beløb, der kan komme til udbetaling ved en fastsat alder. Renten på en børneopsparing ligger typisk omkring 1% - 1,5%. Det er altså ikke store beløb, der tilskrives opsparingen undervejs.

To niende klasser vil spare op til deres sidste skoledag.

Hvis A-klassens elever giver 30 kr. om måneden i de ni måneder vil de i alt have sparet 5670 kr. op. Hvis de tænker, de kan nøjes med 5000 kr., kan de ved hjælp af et CAS-værktøj løse ligningen $21 \cdot x \cdot 9 = 5000$ og få svaret 26,50 kr.

B-klassen bruger et regneark til at regne på opsparingen. Ved hjælp af regnearket kan de få svaret på de to spørgsmål til 4680 kr. og 17 kr. om måneden.

Svaret på det sidste spørgsmål, 31 kr., kan findes ved at prøve sig frem eller anvende regnearksfunktionen *Målsøgning*.

Elevernes undersøgende arbejde

Narrativen omkring opgaverne på siden her er Sagas opsparing til kørekort. Der er en klar progression i det faglige indhold i de tre opgaver.

Opgave 1

Saga har $12 \cdot 400$ kr. + 5000 kr. = 9800 kr. på kontoen efter 12 måneder.

Opgave 2

Ved hjælp af et CAS-værktøj[1] og et ræsonnement fås, at den midterste ligning er den model af virkeligheden, som beskriver situationen, og at morfar skal betale 2200 kr.

$$12 \cdot 400 + 5000 + morfar = 12000$$
$$\Updownarrow$$
$$morfar = 2200$$

Opgave 3

Med assistance fra et oprettet regneark fås en saldo på 11 000 kr., hvis Saga sætter 500 kr. ind om måneden. Saga skal sætte 667 kr. ind hver måned, hvis saldoen skal ende med 13 000 kr. Hvis Saga sætter 800 kr. ind hver måned, vil hun have de 13 000 kr. allerede i januar måned.

Fælles opsamling

Den fælles opsamling kan indeholde samtale om, hvilke CAS-værktøjer der er gode til at løse de givne problemstillinger samt hvilke metoder og formler, der kan anvendes i regnearket for at opnå de ønskede resultater. Den sidste opgave kan løses ved at prøve sig frem, at opstille en ligning eller anvende regnearksfunktionen Målsøgning. Opgaven kan også give anledning til en meget overskuelig løsning i et CAS-værktøj. Det bør prøves og bruges som et konkret udgangspunkt i en samtale om CAS og regneark.

Brug af digitale værktøjer

Brugen af digitale værktøjer hænger her tæt sammen med den fælles opsamling, hvis den afvikles som beskrevet ovenfor. Der er nogle valg at foretage for eleverne i løsningen af opgaverne i dette tema. De vil typisk være individuelle, men vil også afspejle de tilgange, eleverne har fået præsenteret i undervisningen.

1) Ligningen løses for morfar vha. CAS-værktøjet WordMat.

Regneopskrifter

Gennem arbejdet med opslaget kan eleverne opnå en viden om forskellige måder at omskrive regneudtryk på samt udføre beregninger, hvor der indgår variable.

En regneopskrift er en verbalsproglig beskrivelse af en trinvis beregning. I bog 1 er et opslag med titlen *Regneruter*, hvor der arbejdes med samme type udfordring, men her er beskrivelsen givet grafisk.

Brugen af CAS giver eleverne mulighed for at opdage sammenhængen mellem et givet starttal og et sluttal, da det er hurtigt at undersøge, hvordan sluttallet ændrer sig, når starttallet ændrer sig. Ved at bruge CAS er det desuden muligt at erstatte starttallet med en variabel. Slutresultatet bliver så et udtryk, der viser sammenhængen mellem to værdier.

Introduktion og iscenesættelse af elevernes arbejde

I bogen er vist fire eksempler på regneopskrifter, som lægger op til arbejdet på højre side. Lad eleverne prøve og diskuter efterfølgende i klassen, hvilke resultater eleverne er kommet frem til. Det er betydningsfuldt at få diskuteret resultaterne.

Selvom alle i klassen er enige om resultatet, er det væsentligt at få spurgt, om vi nu også kan være sikre på, at resultatet er korrekt. Resultatet behøver ikke at være et tal, men kan lige så godt være en sammenhæng mellem tallet, der tænkes på, og resultatet.

Elevernes undersøgende arbejde

I **opgave 1** skal der arbejdes videre ved at bruge et CAS-værktøj til at undersøge de fire regneopskrifter, der er præsenteret på venstre side. CAS-værktøjet gør det muligt, at eleven kan undersøge mange værdier og på den måde komme frem til en sammenhæng mellem tallet, der tænkes på, og resultatet.

En sproglig beskrivelse af resultatet i **opgave 2** kan lyde: Resultatet er altid lig med tallet, der blev tænkt på.

I **opgave 3** kan de fire regneopskrifter fx omskrives til regneudtryk, som vist i følgende eksempler:

- Regneopskrift 1: Resultatet bliver 7, fordi $((2a + 14) : 2) - a = 7$.
- Regneopskrift 2: Resultatet bliver starttallet, fordi $\frac{(2a + 1) \cdot 5 + 4 - 9}{10} = a$.
- Regneopskrift 3: Resultatet bliver 7, fordi $((a + 10) \cdot 2 - 6) : 2 - a = 7$.
- Regneopskrift 4: Resultatet bliver starttallet, fordi $\frac{a \cdot a - 1}{a + 1} + 1 = a$.

Det er muligt at finde ekstra opgaver med regneopskrifter i bøger med matematiske gåder, som eleverne kan have glæde af, når de skal i gang med at konstruere egne regneopskrifter.

Fælles opsamling

Der er blevet arbejdet med at oversætte et verbalt udtryk til et matematisk udtryk i form af et regneudtryk, hvor der indirekte bliver arbejdet med at sætte parentes. Brugen af CAS er væsentlig i den fælles opsamling. Brug eksemplet herunder, hvor CAS-værktøjet viser, hvad der sker fra en linje til den næste.

Brug af digitale værktøjer

Ved at bruge et CAS-værktøj er det muligt at erstatte et tal med en variabel og på den måde generalisere et regneudtryk. Eksemplet, der er vist i bogen, kan generaliseres ved at erstatte 8 med en variabel. I regneudtrykket i opgave 2 og i CAS-eksemplet til højre er brugt a som variabel.

Når CAS bruges, som vist nedenfor, kan det være med til at øge elevernes viden og forståelse vedrørende omskrivning og reduktion af algebraiske udtryk, hvis der samtidig er en dialog om, hvad der sker fra linje til linje.

Regneopskrift – et eksempel

$\mathbf{tal} := a = a$

$\mathbf{linje1} := \mathbf{tal} + 3 = a + 3$

$\mathbf{linje2} := \mathbf{linje1} \cdot 6 = 6 \cdot (a + 3)$

$\mathbf{linje3} := \mathbf{linje2} - 12 = 6 \cdot a + 6$

$\mathbf{linje4} := \frac{\mathbf{linje3}}{6} = a + 1$

$\mathbf{slut} := \mathbf{linje4} - 1 = a$

Faktorisering

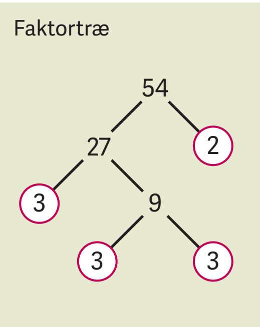
I dette tema arbejdes med fire vigtige, matematiske begreber: divisor, primtal, sammensatte tal og *faktorisering*. Når man opløser et tal i primfaktorer, kaldes det faktorisering.

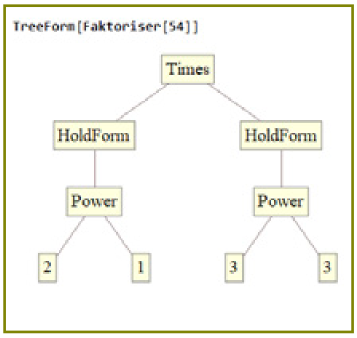
Der arbejdes kun med naturlige tal, altså positive, hele tal i dette opslag.

Introduktion og iscenesættelse af elevernes arbejde

På venstresiden eksemplificeres de fire begreber. Det er vigtigt i den indledende samtale om temaet at sikre sig, at eleverne forstår begreberne.

På siden præsenteres to versioner af et *faktortræ* som en grafisk repræsentation af begrebet faktorisering.





MatematiKan

I begge tilfælde er det tallet 54, der faktoriseres.

I MatematiKans TreeForm aflæses faktoriseringen i nederste lag som: $2^1 \cdot 3^3$. Normalt vil man så bare skrive faktoriseringen uden eksponenten 1 på 2-tallet.

Det er et af mange eksempler i matematikken på: 'Når der ikke står noget, står der…'. Og her er det så et 1-tal. I MatematiKan giver faktoriseringen denne række af divisorer:

alleDivisorer[54]

{1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, 54}

Elevernes undersøgende arbejde

Opgave 1

Opgaven kan løses med forskellige CAS-værktøjer. Primfaktorerne i 48 er 2 og 3: $24 \cdot 3$, og tallets ti divisorer er {1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24 og 48}.

Opgave 2

Eleverne fremstiller en taltavle som i bogen, men alle felter farves i overensstemmelse med farvekodningen. På den baggrund bliver svarene på påstandene:

- Sandt: 48 har ti divisorer og der er ingen tal i denne taltavle, der har flere end ti divisorer.
- Sandt: Kvadrattallene 2, 9, 25 og 49 har alle 3 divisorer, mens 16 har 5 og tallet 36 har 9 divisorer.
- Falsk: Af de 50 tal udgør primtallene {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43 og 47} kun de 15.

Eleverne kan opfordres til selv at komme med påstande, der kan vurderes som sande eller falske.

Opgave 4

Funktionen sfd[tal, tal, tal, ...] angiver den største fælles divisor, som er det største tal, der går op i de valgte tal.

Funktionen kan fx anvendes, når en brøk skal forkortes. I mange CAS-værktøjer anvendes den engelske forkortelse gcd: greatest common divisor.

Funktionen mfm[tal, tal, tal, ...] angiver det mindste fælles multiplum. Den kan anvendes til at finde mindste fælles nævner, fx i forbindelse med addition af brøker. Den engelske forkortelse for begrebet er lcm: least common multiple.

Den fælles opsamling

Den fælles opsamling kan ske ved at klassen i fællesskab drøfter, hvordan der er arbejdet med taltavlen.

Hvilke strategier har de anvendt til at finde antallet af divisorer, og har de fundet frem til samme løsning?

Hvilke påstande har de selv fremsat – og kan de andre elever sige sandt eller falsk til dem?

Brug af digitale værktøjer

CAS-værktøjerne giver på forskellige måder muligheder for at undersøge divisorer. I denne opgave har antallet af divisorer været i fokus, men angivelse af de enkelte divisorer og deres sum kan også foretages.

1) https://da.wikipedia.org/wiki/Primtal

Statistik

I dette tema er statistik det matematiske fokus. Med udgangspunkt i situationer fra elevernes liv, hverdag og karakterer introduceres diagrammerne sumkurve og boksplotmed tilhørende observationer. I opgaverne arbejdes desuden med de statistiske deskriptorer.

Introduktion og iscenesættelse af elevernes arbejde

Elevernes omverden er fuld af indhold, der kan anskues med 'matematikbriller'. De to diagrammer lægger på hver sin måde op til samtale i klassen om hvilke informationer, man kan få af diagrammer alene og af de deskriptorer, der er tilknyttet de to boksplot.

I sumkurven kan man aflæse, at den, der har flest penge til rådighed, har noget mere end 2400 kr., at mere end halvdelen har over 800 kr. samt at noget over 10% har mere end 1600 kr. til rådighed.

Samtalen kan lede frem til, at eleverne konstruerer en sumkurve ud fra egne data. De to boksplot, der er baseret på en klasses karakterer, er suppleret med en række statistiske deskriptorer. De kan give anledning til samtaler om, hvad man kan læse af diagrammet alene og om hvilken prøveform, eleverne har klaret bedst.

Middeltallet, i MatematiKan benævnt middelværdi, er noget større i prøven uden hjælpemidler end i prøven med hjælpemidler. Der kan udarbejdes mange forslag til en række karakterer, der giver 6,5 frem for 5,8 som middeltal.

Elevernes undersøgende arbejde

Omdrejningspunktet for alle opgaverne er en flaskeindsamling, der har til formål at skaffe klassen tilskud til en skoletur.

Opgave 1 og 2

De to første opgaver tager udgangspunkt i den ufærdige tabel. Middeltallet kan beregnes til 145 flasker og et stolpediagram vil vise fordelingen på de ti måneder.

Opgave 3

I denne opgave skal tabellen tilføjes de summerede værdier. De skal bruges til et diagram, hvor det i det sidste spørgsmål gælder om at finde tidspunktet for indsamlingen af halvdelen af det samlede antal flasker. Ved udgangen af januar har klassen samlet 683 flasker, så halvdelen nås på et tidspunkt i februar.

Opgave 4

Det er muligt at hente en del oplysninger i både boksplot og deskriptorer. I forhold til påstandene er variationsbredden for A-klassen større end for B-klassen. Både den elev, der har samlet færrest og den elev, der har samlet flest flasker, går i A-klassen.

Lad eleverne formulere påstande, der kan besvares enten ved hjælp af boksplottene eller deskriptorerne.

Fælles opsamling

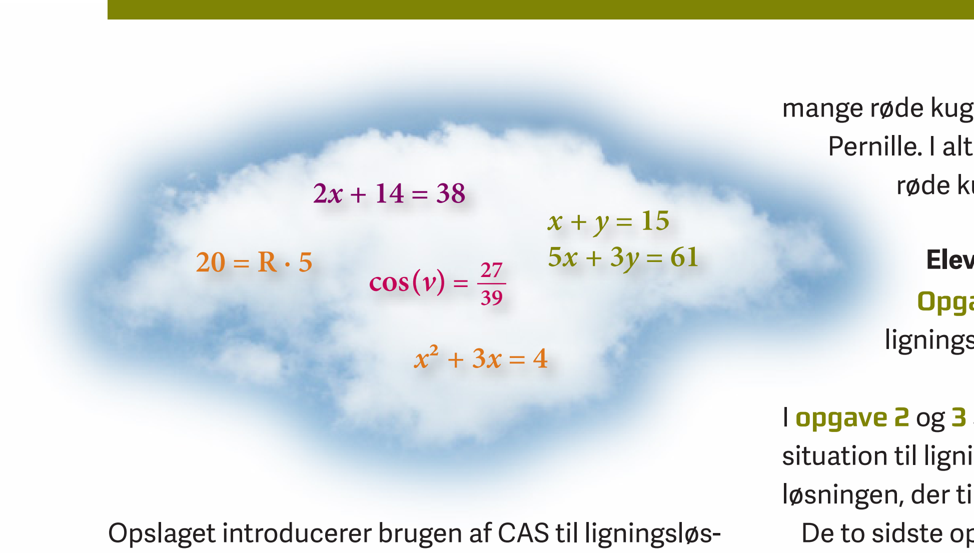
Det er oplagt at diskutere de forskellige løsningsforslag, som eleverne er kommet frem til i fællesskab. De kan enten designes, så de kan hænges op i klassen, eller de kan lægges på en fælles digital platform, fx SkoleTube.

Det er en diskussion værd, hvilke forslag, der giver godt formidlede svar på opgaverne.

Brug af digitale værktøjer

På siderne i elevbogen og her i lærervejledningen anvendes forskellige digitale værktøjer, der kan frembringe diagrammer, der kan anvendes til både løsning og beskrivelse. Det er en diskussion værd at forsøge at finde frem til de værktøjer, der er de mest tilgængelige for eleverne i de enkle situationer.

Ligninger og ligningssystemer



Opslaget introducerer brugen af CAS til ligningsløsning samtidig med, at der også er fokus på problemløsning, hvor et problem skal oversættes til en ligning, og hvor løsningen efterfølgende skal tolkes. Løsning af ligninger var tidligere ofte en vanskelig opgave, men det kan nu let klares ved at bruge et digitalt værktøj. Derimod er det krævende arbejde med at opstille ligninger og tolke løsninger stadig en kognitiv udfordring, selvom der i dele af denne proces kan bruges digitale værktøjer.

Introduktion og iscenesættelse af elevernes arbejde

I skyen er vist 4 ligninger og et ligningssystem, som er udgangspunkt for den fælles indledende drøftelse i klassen.

En ligning kan fx løses ved at bruge disse metoder: Gæt og prøv efter eller en anden uformel metode, algebraisk ved at regne, grafisk ved at tegne og "solve" i et CAS-værktøj.

Se på ligningerne i skyen og drøft i fællesskab, hvordan de kan løses. Fx har eleverne formodentlig ikke viden om, hvordan ligningen $\cos(v) = \frac{27}{39}$ skal løses algebraisk. Her kan så gættes på en vinkel og prøves efter, om cosinus til vinklen giver $\frac{27}{39}$. Denne ligning kan så oversættes til en situation, hvor man skal finde størrelsen af en vinkel i en retvinklet trekant.

Ligningssystemet kan løses ved at tegne de to sammenhænge i et koordinatsystem og så aflæse skæringspunktet. Selve ligningssystemet kan fx oversættes til denne historie: Pernille har både røde og blå kugler. I alt har hun 15 kugler. Yasmin har 5 gange så mange røde kugler og 3 gange så mange blå som Pernille. I alt har Yasmin 61 kugler. Hvor mange røde kugler har Pernille?

Elevernes undersøgende arbejde

Opgave 1 lægger op til at bruge CAS til ligningsløsning.

I **opgave 2** og **3** skal eleverne først oversætte en situation til ligninger. Derefter skal de bruge CAS til løsningen, der til sidst fortolkes.

De to sidste opgaver lægger op til, at eleverne selv skal digte situationer, som kan løses ved at opstille ligninger.

Fælles opsamling

Alle ligninger er kendetegnet ved, at der er en ubekendt, som man skal finde værdien af. Den ubekendte kaldes ofte x eller y, men andre symboler bør også indgå i elevernes arbejde med ligninger.

I forbindelse med opskrivning af ligninger får man i nogle værktøjer brug for enten at kunne fortolke eller indtaste det logiske tegn $\wedge$, som læses "og".

De fleste CAS-værktøjer tilbyder, at man kan vælge mellem enten en eksakt løsning, som er en præcis løsning angivet med matematiske symboler, eller en tilnærmet værdi, hvor løsningen angives som et decimaltal med et passende antal betydende cifre.

Brug af digitale værktøjer

Nederst på side 16 er vist, hvordan man kan løse ligninger og ligningssystemer i CAS-værktøjet TI-Nspire CAS. På denne YouTube kanal[1] er der videoer, som viser, hvordan man kan bruge andre CAS-værktøjer til ligningsløsning.

Selvom CAS er et stærkt værktøj til ligningsløsning, bør der i undervisningen arbejdes med en forståelse af lighedstegnet, en ligning og forskellige metoder til ligningsløsning.

1) https://www.youtube.com/playlist?list=PL5AVlZ6E3Cpi47OJlk2Ne9GmNRrHVFOuZ

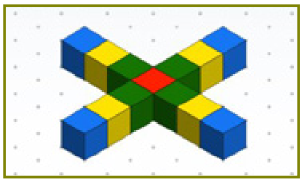
Talfølger og figurfølger

I dette tema arbejdes med rækkefølger af tal og rækkefølger af figurer. Figurerne er her kubeformede klodser. Klodserne er tegnet i Isometric-Drawing-Tool[1], som er et enkelt og håndterbart redskab i denne sammenhæng.

Introduktion og iscenesættelse af elevernes arbejde

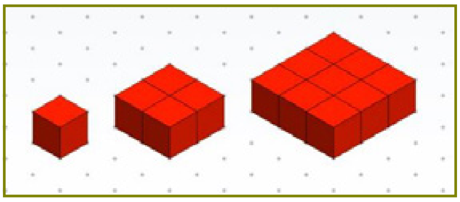
Talfølger kan repræsenteres på forskellige måder: Tabel, tegning, graf og funktionsforskrift. Begrebet rækkefølger i matematik introduceres med to enkle eksempler. I teksten er talfølgen 5-tabellen grundlaget for rækkefølgen, mens 3-tabellen i skemaet giver de næste tal i talfølgen: 18, 21 og 24.

Figurfølgen udvikler sig med fire klodser fra gang til gang – Figur 4 har fået tilføjet fire blå klodser.



Figur nr.	1	2	3	4	5	6	7	8
Antal	1	5	9	13	17	21	25	29

Figurfølgen nedenfor passer til funktionen $f(x) = x^2$



Elevernes undersøgende arbejde

I opgaverne bringes alle repræsentationer i spil.

Opgave 1 og 2

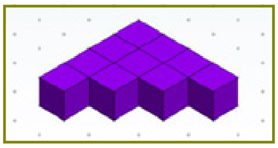
Løsningsforslag til de to første opgaver er samlet i skemaet herunder:

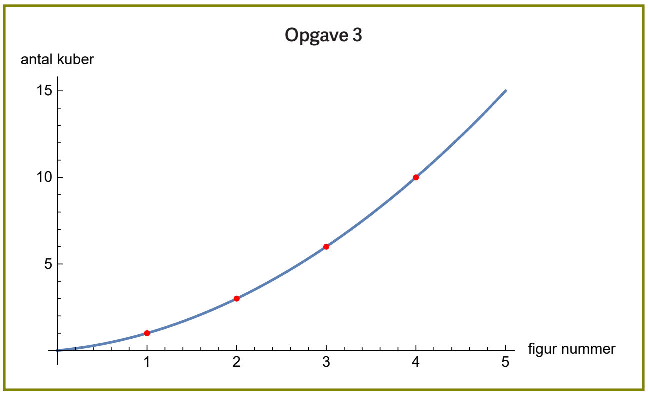
	1	2	3	4	5	6	7	f(x) =
A	1	8	27	64	125	216	343	x^3
B	2	5	10	17	26	37	50	$x^2 + 1$
C	1	7	17	31	49	71	97	$2 \cdot x^2 - 1$

Opgave 3

Figurfølgen i fire repræsentationer: Tabel, tegning, graf og funktionsforskrift. Funktionsforskriften bestemt ved regression er $f(x) = 0{,}5x^2 + 0{,}5x$.

Figur nr.	1	2	3	4
Antal	1	3	6	10





Opgave 4

Figur 4 består af 25 kvadrater.

Figur nr.	1	2	3	4
Antal	1	5	13	25

Funktionsforskriften bestem ved regression er $f(x) = 2x^2 - 2x + 1$

Fælles opsamling

Den fælles opsamling kan foregå ved, at der drøftes, hvordan de forskellige repræsentationer giver forskellige udtryk.

Brug af digitale værktøjer

De forskellige digitale værktøjer, som eleverne har til rådighed, kan de samme ting, men der er forskel på de syntakser, der skal til at skabe de forskellige grafiske udtryk. Valg af digitale værktøjer afhænger af opgavens karakter, de digitale værktøjer, der er til rådighed samt lærerens og elevernes digitale kompetencer.

1) https://www.nctm.org/Classroom-Resources/Illuminations/Interactives/Isometric-Drawing-Tool/

Vand på flaske

Introduktion og iscenesættelse af elevernes arbejde
En af de miljømæssige udfordringer, der er i fokus i øjeblikket, er mængden af plast, der bliver smidt ud. En del af denne plast bliver genanvendt, men meget af den lander i naturen – både på land og i vand. Oplægget her problematiserer mængden af plastflasker, der bliver produceret og solgt med kildevand i.

Klassesamtalen, med udgangspunkt i de fem punkter, giver god mulighed for at eleverne får indsigt i den problematik, der ligger til grund for opslaget. Giv eleverne tid til at diskutere de forskellige forhold, der bliver spurgt til, og lad dem undersøge mere om emnet på hjemmesider, der kan give dem yderligere viden om emnet.

Som introduktion til oplægget og for at gøre det mere relevant for eleverne, er det en god ide at lave en undersøgelse i klassen, hvor eleverne undersøger, i hvor høj grad de drikker vand fra flasker, og hvordan de efterfølgende skaffer sig af med dem. Denne undersøgelse kan derefter sammenlignes med de fakta, der er i opslaget og andre fakta fra relaterede hjemmesider.

Elevernes undersøgende arbejde
Dette opslag lægger op til, at eleverne arbejder i grupper og gerne vælger forskellige fokus, så emnet bliver belyst på bredest mulige måde. Eleverne indsamler oplysninger, taster dem ind og bearbejder dem, så de kan finde den bedst mulige måde at visualisere dem på. Fremlæggelserne tager udgangspunkt i elevernes bearbejdede data og danner grundlag for en samtale for klassen, hvor de kan stille spørgsmål til hinanden og evt. komme med gode ideer til andre måder at arbejde med opgaverne på.

Eleverne skal derefter selv udarbejde en problemstilling, som de kan bearbejde på samme vis som den ovenstående. Det er vigtigt, at læreren hjælper eleverne til at bruge stilladsering i dette arbejde, så de ikke stiller sig selv en for svær opgave.

Brug af digitale værktøjer
Lad eleverne anvende de it-værktøjer, de mener er bedst til deres undersøgelser. Nogle grupper vil foretrække at arbejde med et CAS-værktøj, andre vil vælge andre muligheder – vigtigst af alt er, at eleverne er opmærksomme på de dynamiske muligheder, de får i et it-værktøj. Når de fremlægger deres resultater, kan læreren bede dem begrunde deres valg af it-værktøj, så de andre grupper i klassen får indblik i de forskellige muligheder, der ligger i at arbejde med it-værktøjer.

Yderligere materiale
Hvis læreren og klassen vil beskæftige sig yderligere med temaet, ligger der et oplæg på hjemmesiden matematikmedit.dk, der lægger op til at arbejde med temaet *Affald i havene*.


Foto: Colourbox

Beregning af usikkerhed

Brugen af regnetekniske hjælpemidler gør det muligt at angive et resultat med masser af cifre. Men hvor mange betydende cifre er det rimeligt at angive svaret med? Et lille eksempel, der illustrerer dette: Et bed i en græsplæne har form som en cirkel. Ved en måling finder man ud af, at omkredsen er 15,2 m. Men hvor præcist er det muligt at måle en længde?

Arealet beregnes med et CAS-værktøj til

$$\pi \cdot \left(\frac{15{,}2}{2\pi}\right)^2 \approx 18{,}38557902597575.$$

Men skal man så skrive, at arealet er ca. 18,39 m^2, ca. 18,4 m^2 eller ca. 18 m^2? Spørgsmål af denne type er centralt i arbejdet med dette opslag.

I opslaget er det et bevidst valg, at udtrykket "betydende cifre" ikke optræder, da det er et vanskeligt begreb at håndtere for mange elever i grundskolen. Opslagsværket I-FYSIK C[1] giver en fin forklaring på betydende cifre.

Introduktion og iscenesættelse af elevernes arbejde

Brug eksemplet og tegningen øverst på siden til den indledende drøftelse i klassen. Det kan evt. suppleres med en aktivitet, hvor man vil finde arealet af en væg i klassen.

Det første spørgsmål giver anledning til både at reflektere over, hvor præcist man har brug for at kende et resultat og at reflektere over, hvor mange betydende cifre det er rimeligt at angive resultatet med.

De måleinstrumenter, der er vist på tegningen, er måleinstrumenter, der findes på alle skoler. For at gøre diskussionen mere konkret, kan eleverne gennemføre målinger med de viste redskaber.

Nederst på side 22 er vist et eksempel på, hvordan man kan bruge CAS til at undersøge usikkerheden. Gennemfør undersøgelsen med et CAS-værktøj og diskuter både, hvor præcist man kan måle, og hvordan man kan skrive resultatet. I dette tilfælde vil det være rimeligt at angive arealet af græsplænen til ca. 150 m^2.

Elevernes undersøgende arbejde

I **opgave 1** skal eleverne måle på rektangulære genstande, overveje usikkerheden for målingen, beregne og overveje, hvor præcist de kan angive arealet.

I **opgave 2** drejer det sig om runde genstande, hvor der ofte er større usikkerhed på målingen, når man skal bestemme radius eller diameter.

I **opgave 3** indgår der også måling af vinkler. Med de instrumenter, som eleverne har til rådighed, er usikkerheden på en vinkelmåling mindst 1 grad og ofte mere, hvilket betyder, at vinkelmålingen bidrager væsentligt til den samlede usikkerhed. Dette gælder særligt, når vinklen nærmer sig 90°.

øjenhøjde = 1.52 m Definer

u = 0.005 m Definer

vinkel = 56° Definer

uv = 2° Definer

tan(vinkel) · vandret + øjenhøjde = 13.62 m Beregn

tan(vinkel + uv) · (vandret + u) + (øjenhøjde + u) = 14.59 m

tan(vinkel − uv) · (vandret − u) + (øjenhøjde − u) = 12.74 m

Fælles opsamling

I den fælles opsamling kommer man ind på de pointer, som eleverne gerne skulle have erfaret ved at arbejde med opgaverne i opslaget. Det drejer sig både om valg af måleredskab og beregning af usikkerhed.

Brug af digitale værktøjer

CAS-værktøjerne bruges især til beregning, hvor fordelen ved at bruge CAS er, at eleverne kun skal ændre tallene for at undersøge, hvad der sker med et resultat, når man regner med usikkerhed. Dette gør det lettere at fokusere på, hvor præcist man angive et resultat, hvor udgangspunktet er måling.

1) https://goo.gl/ps3UfT

Bestemmelse af tilnærmet værdi for kvadratroden af et tal

Temaet for dette opslag er hentet fra matematikkens verden. Eleverne bliver præsenteret for tre metoder, som kan bruges til at bestemme kvadratroden af et tal, hvor kvadratroden er et irrationalt tal. Et irrationalt tal er et tal, som ikke kan skrives som en brøk, hvor tælleren er et helt tal og nævneren er et naturligt tal. Opdagelsen af de irrationale tal tillægges ofte pythagoræerne, som var et filosofisk broderskab grundlagt af Pythagoras.

Introduktion og iscenesættelse af elevernes arbejde

Hvorfor overhovedet beskæftige sig med at beregne en tilnærmet værdi for kvadratroden af 5, når alle lommeregnere har en tast, der giver denne værdi! Spørgsmålet kan vendes om, så man spørger om, hvordan man har beregnet en tilnærmet værdi, før man fik lommeregner. Overvejelser vedrørende begge disse spørgsmål kan være et godt udgangspunkt for en indledende snak i klassen.

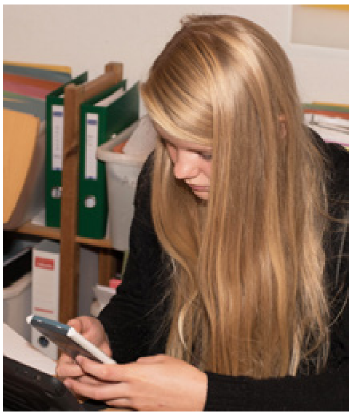


Foto: Jørgen Uhl Pedersen

Drøft også hvilken forskel, der er på en tilnærmet værdi og en præcis værdi, samt hvornår man har brug for at angive en tilnærmet værdi af et irrationalt tal.

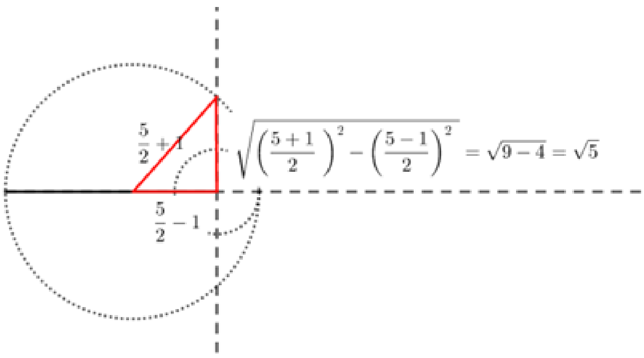
Diskuter efterfølgende hver af de tre metoder. Metode 1, som bliver vist og forklaret i denne video[1], giver et præcist geometrisk mål, men ikke et tal, for værdien af $\sqrt{5}$.

Metode 2 bygger på, at man ved gentagne beregninger bestemmer mindre og mindre intervaller for værdien af $\sqrt{8}$. Man starter fx med at gætte på, at værdien af $\sqrt{8}$ er et tal mellem 2 og 3. Så deler man op i tiendedele og finder, at værdien ligger mellem 2,8 og 2,9. Så deler man i hundrededele osv. Metoden er langsommelig, da den kræver mange beregninger. Brug evt. et regneark til beregningerne.

Metode 3 giver hurtigt en værdi med stor præcision. Metoden er forklaret i denne video[2] på YouTube.

Elevernes undersøgende arbejde

Metode 1 bygger på argumenter med Pythagoras' sætning.



I **opgave 2** kan eleverne med fordel bruge et regneark til deres undersøgelse af metode 2.

Metode 3 kræver større forståelse, men giver efter få beregninger en god tilnærmet værdi for kvadratroden af et irrationalt tal.

Fælles opsamling

De tre viste metoder har ikke praktisk betydning længere i skolen, men får alligevel eleverne til at reflektere over den matematik de har anvendt ved at arbejde med metoderne. I datalogi har optimering af beregningsalgoritmer, som den, der er vist her, stor og stigende betydning med udvikling af store centre, hvor meget store datamængder skal behandles.

Brug af digitale værktøjer

Brugen af digitale værktøjer gør det muligt at undersøge, hvordan man tidligere arbejdede med at bestemme tilnærmede værdier af irrationale tal. De beregninger. som tidligere måtte foregå manuelt, klares af værktøjerne.

1) https://youtu.be/fHbOAcWw1nY
2) https://youtu.be/8Yhh71NLTU8

Rumfang

I dette tema skal der arbejdes med rumfang af en kasse og af en keglestub. Udgangspunktet er en kendt dagligdags situation, hvor der skal blandes saftevand i et forhold, der angivet på kartonen eller flasken med den koncentrerede saft. Blandingsforhold på emballagen angives som enten 1 + 4 eller 1 : 4, og forholdet læses ofte som 1 til 4, uanset hvordan det er angivet.

Introduktion og iscenesættelse af elevernes arbejde

Det anbefales at medbringe en karton med koncentreret saft, som kan være udgangspunkt for undersøgelser. Desuden spiller keglestubben en central rolle i opgaverne her, hvor saften skal blandes i en karaffel.

Den undersøgelse, der foreslås i opslaget, holder målene på bunden fast og så kan højden på 20,4 cm findes ved løsning af en ligning som denne:

$$7\ cm \cdot 7\ cm \cdot højde = 1000\ cm^3.$$

Karaflen på tegningen i opslaget er ikke målfast. Den består af tre sammensatte figurer: to keglestubbe med en cylinder imellem. Målene er angivet for den nederste, største keglestub. Rumfanget er angivet til ca. 700 cm². Det kan mere nøjagtigt beregnes til 687 cm³:

$$\tfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot 15 \cdot (5^2 + 2{,}5^2 + 5 \cdot 2{,}5) \approx 687{,}22$$

Opgaven kan udvides til også at omfatte de to andre figurer, hvor højden på den cylinderformede del er 3 cm og radius 2,5 cm. Diameteren i toppen er 6,5 cm og højden af den øverste keglestub 6 cm:

$$687{,}22 + \pi \cdot 2{,}5^2 \cdot 3 + \tfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot 6 \cdot (2{,}5^2 + 3{,}25^2 + 2{,}5 \cdot 3{,}5) \approx 906{,}74$$

Inden beregningerne foretages, kan der arbejdes med hypoteser, da det kan være svært lige at gennemskue, om resultaterne af de lidt komplicerede beregningerne kan være korrekte.

Elevernes undersøgende arbejde

Opgave 1. Saftens højde i kartonen kan beregnes til 18,5 cm ved at løse ligningen 6 · 9 · *højde* = 1000. Afstanden til toppen er derfor 1,5 cm.
De tre følgende opgaver kan opfattes som stabelopgaver, der skal løses i rækkefølge.

Opgave 2. Karaflens samlede rumfang sættes til V. Udtrykket på højre side af lighedstegnet er det rumfang, saften skal udgøre i det angivne blandingsforhold 1 : 4, som her tolkes som 1 del saft og 4 dele vand. Det betyder, at saften skal udgøre en femtedel af det samlede rumfang.

Regneudtrykket indeholder to ubekendte på venstre side og en på højre side. Den ene er den ubekendte højde, h, og den anden er den radius, r, der i saftens overflade. Den tredje ubekendte er rumfanget, V. Regneudtrykket er altså en ligning med tre ubekendte.

Opgave 3. Regneudtrykket for den øverste del af karaflen: $\tfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot (16 - h) \cdot (r^2 + 2{,}5^2 + r \cdot 2{,}5) = \tfrac{4}{5} \cdot V$

Opgave 4. Karaflens samlede rumfang, V, kan beregnes til 733 cm³: $\tfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot 16 \cdot (5^2 + 2{,}5^2 + 5 \cdot 2{,}5) \approx 733$

Dermed er en af de tre ubekendte fundet. De to resterende ubekendte findes ved at løse ligningssystemet:

$$\tfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot h \cdot (5^2 + r^2 + 5 \cdot r) = 733 \cdot \tfrac{1}{5}$$
$$\tfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot (16 - \mathrm{h}) \cdot (r^2 + 2{,}5^2 + 2{,}5 \cdot r) = 733 \cdot \tfrac{4}{5}$$

Opgaven giver to sæt løsninger, men det er kun det, hvor begge værdier er positive, der kan bruges: Højden skal være næsten 2 cm og radius 4,7 cm.

Fælles opsamling

Den fælles opsamling kan sætte fokus på de resultater, der er kommet ud af overvejelser og beregninger. Hvis der i iscenesættelsen arbejdes med hypoteser omkring problemstillingerne, kan de nu bekræftes eller afkræftes. En fælles samtale kan handle om, hvordan hypoteser kan bruges til at vurdere resultater.

Brug af digitale værktøjer

I dette tema er fokus på problemløsning, og der skal både foretages ligningsløsning og beregninger med formler, som enten er nye eller måske endda ukendte for eleverne. Brugen af CAS vil sikre hurtige og korrekte beregninger, så fokus kan være på problemløsningen.

Bremselængde i trafikken

Foto: Colourbox

Introduktion og iscenesættelse af elevernes arbejde

Fart, kørsel, hårde opbremsninger og andre begreber fra trafikkens verden vil være relevante at diskutere med eleverne som iscenesættelse af dette opslag. Der er sket ændringer for aldersgrænserne for kørekort, da det nu er muligt at erhverve kørekort som 17-årig – og ældre mennesker skal ikke længere have fornyet kørekortet hvert år, når de når en vis alder. Har det konsekvenser for, hvordan bilister færdes i trafikken? Hvad koster det at køre for stærkt? Er der særlige forhold, hvis man kører for stærkt ved vejarbejde? Kan man undersøge, om der er andet, der har indflydelse på bremselængde – dæktype (vinter-/sommerdæk), mønsterdybde, dæktryk (ældre biler) eller andre ting? Gælder der samme forhold for andre køretøjer?

Elevernes undersøgende arbejde

På venstresiden i dette opslag bliver eleverne bedt om at løse fem mindre opgaver, som de kan anvende i det videre arbejde på højresiden. Lad eleverne arbejde sammen i par eller grupper ved løsning af opgaverne såvel på venstre- som højresiden. Brug venstresiden som en del af introduktionen og lad eleverne forklare hinanden, hvordan de løser de fem opgaver. Højresiden indeholder en del udregninger, som eleverne skal bearbejde. Her er det vigtigt, at begreberne *bremseevne, bremselængde, reaktionslængde* og *reaktionstid* bliver begreber, som eleverne forstår indholdet af, ellers bliver undersøgelserne og beregningerne løsrevet fra konteksten, og eleverne får svært ved at anvende dem til at konkludere og ræsonnere i deres løsningsforslag.

Fælles opsamling

Eleverne deler deres viden fra opgaverne, og hvis de har været ude at undersøge nogle køretøjer i den 'virkelige verden', vil det være oplagt, at de resultater, de har, formidles til resten af klassen. De forskellige modeller, eleverne har arbejdet med, kan være interessante at tage op i plenum og der diskutere, hvad der ville ske, hvis forholdene ændrede sig og hvilke forhold, der kan ændre sig.

Brug af digitale værktøjer

Der er i høj grad brug for it-værktøjer i denne opgave – særligt CAS er anvendeligt her. Når eleverne skal håndtere de forskellige formler og indsætte forskellige tal, giver det rig mulighed for at anvende dynamikken i programmet. Et eksempel på dette kunne se således ud:

Opgave 3

```
LøsLigning[20, -9 t == 0, t]
t == 2,22222222222
```

Tiden er 2,2 s

$$\frac{1}{2} \cdot 9 \cdot \frac{m}{s^2} \cdot (2{,}2 \cdot s)^2$$

21,78 m

Bremselængden er ca. 22 m

Æske med låg

Arbejdet med dette opslag giver gode differentieringsmuligheder, da udgangspunktet er en aktivitet, hvor eleverne producerer æsker med forskellige højder, måler og beregner, tegner en graf og tilslut opstiller en model for rumfanget af æsken. Brugen af et digitalt værktøj understøtter elevernes arbejde med tabellægning, beregning og opstilling af en model for rumfanget af æsken.

Introduktion og iscenesættelse af elevernes arbejde

Udgangspunktet er et stykke papir på 20 cm × 28 cm, hvilket giver relativt pæne tal at regne med, men A4 papir som måler 21,0 cm × 29,7 cm kan også bruges. Det giver næsten samme resultater.

Vis evt. hvordan æsken samles, og lad så eleverne fremstille forskellige æsker, måle på æskerne og beregne rumfanget. Lad eleverne bruge et regneark eller et andet digitalt værktøj til tabeller. De kan så senere bruger værktøjet til beregninger og tegning af grafer.

Nogle elever vil hurtigt indse, at det ikke er nødvendigt at fremstille æskerne, men at man også kan tænke sig til målene. Andre har brug for at opnå denne viden ved gentagne gange at fremstille flere æsker og skrive resultatet i en tabel.

Æskens højde	1	2	3	4	5
Æskens længde	18	16	14	12	10
Æskens bredde	12,5	11	9,5	8	6,5
Æskens rumfang	225	352	399	384	325

Når eleverne har fremstillet et passende antal æsker diskuteres spørgsmålene nederst på side 30.

Sammenhængen mellem æskens højde og længen af æsken kan udtrykkes rent sprogligt ved, at længden bliver mindre, når æsken bliver højere eller som en talmæssig sammenhæng.

For mange elever er det overraskende, at der ikke gælder samme sammenhæng mellem højden og æskens rumfang.

Spørgsmålene går på CAS-værktøjer, men det kan være ligeså frugtbart at bruge GeoGebra eller et regneark til de videre undersøgelser af de forskellige sammenhænge.

Elevernes undersøgende arbejde

I første udgave af bøgerne er der en fejl i illustrationerne øverst side 31. Korrekt illustration kan hentes her[1].

Opgave 1. Der er en lineær sammenhæng mellem æskens højde og bredde. Sammenhængen kan vises i en tabel, som en graf, som en funktionsforskrift eller forklares verbalt.

Opgave 2. Sammenhængen mellem æskens højde og rumfang bliver en tredjegradsfunktion. Den sproglige beskrivelse kan fx være: Æskens rumfang vokser til ca. 400 cm³, når højden er ca. 3,2 cm. Derefter aftager rumfanget og bliver 0, når æskens højde er ca. 9,3 cm.

Opgave 3. Det størst mulige rumfang er ca. 400 cm³, når æsken har en højde på ca. 3,3 cm.

Fælles opsamling

I opslaget er der arbejdet med de sammenhænge der er beskrevet i skemaet[2] herunder.

Til / Fra	Situation	Tabel	Graf	Forskrift
Situation		Måle	Skitsere	Modellere
Tabel	Aflæse		Plotte	Beregne/ tilnærme
Graf	Tolke	Aflæse		Aflæse/ tilnærme
Forskrift	Oversætte	Beregne	Beregne/ plotte	

Processen i introduktionen var en situation med fremstilling af æsker, hvor eleverne målte og opstillede en tabel, dernæst tegnede de en graf, og til slut opstillede de en forskrift. I opgave 3 er udgangspunktet grafen.

Brug af digitale værktøjer

I opslaget er der vist eksempler fra TI-Nspire CAS, men et regneark eller GeoGebra vil her være gode værktøjer.

1) https://goo.gl/nMwpft

2) Efter Claude Janvier, canadisk matematikdidaktiker.

Sandsynlighed og simuleringer

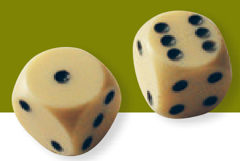


Foto: Bjørn Rasmussen

I dette tema med sandsynlighed og simuleringer arbejder elever både med praktiske øvelser og beregninger. Beregningerne er baseret på både statistisk og kombinatorisk sandsynlighed.

Introduktion og iscenesættelse af elevernes arbejde

Til introduktionen skal bruges et antal tændstikæsker. Introduktionen er den gamle leg med at vippe en æske med tændstikker. Den lægges på kanten af et bord for med pegefingeren at slå nede fra og op, så æsken roterer og lander på bordet. Den lander på en af tre typer flader: den store flade, på siden eller på enden. En hypotese vil almindeligvis være, at den oftest lander på den store af fladerne og ikke så tit står på højkant på enden.

Den klassiske Tordenskjold tændstikæske har målene 58 mm × 34 mm × 17 mm.

Gruppens simuleringer er foretaget på baggrund af de tre siders arealer. Til sammenligning med gruppen, der har simuleret, er procentfordelingen mellem arealerne af fladerne som vist th. I klassen kan her diskuteres forskel på beregninger, forsøg og simuleringer.

	Enden	Siden	Store
Side mm	17	34	58
Arealer mm²	578	986	1972
Procent	16,3%	27,9%	55,8%

Der er mange variationsmuligheder i kast med terninger. Her er det forskellen, der beregnes og udfaldene er eksemplificeret i MatematiKan og et regneark. Valget af digitalt værktøj foretages i forhold til den opgave, der skal løses. I MatematiKan anvendes funktionen *Randominteger*, der finder et tilfældigt tal mellem 1 og 6, svarende til øjnene på en terning.

To udfald trækkes fra hinanden, og den hele værdi sikres af Abs-funktionen. I regnearket anvendes tilsvarende funktioner SLUMPMELLEM og ABS.

Elevernes undersøgende arbejde

Opgave 1. Sammenligningen kræver en klods til det sidste punkt. For at kunne foretage simuleringerne kræves mål på siderne, så en klods med andre mål kan bringes i spil. Arealerne på klodsens tre forskellige flader beregnes til 8 cm², 14 cm² og 28 cm².

Opgave 2. En optælling af de 216 terningkast, der er mulige, giver denne fordeling af de seks mulige udfald.

Forskel	1	2	3	4	5	6
Antal	16	40	52	52	40	16
Procent	7%	19%	24%	24%	19%	7%

Et eksempel på en sammenligning mellem hyppigheden af de beregnede udfald og en simulering i regnearket kunne se således ud:

Procent	7%	19%	24%	24%	19%	7%
Simulering	6%	16%	29%	24%	16%	9%

Det kan give en god anledning til samtale omkring de to former for sandsynlighed.

I forbindelse med teknologiforståelse skal eleverne se eksempler på programmering. I CAS-værktøjet MatematiKan kan fire gennemløb med kast af tre terninger og de tilhørende udregninger se således ud, hvor i er en tællevariabel og t er en tabel med de tre terningkast:

```
For[i=1, i<5, i++, t={RandomInteger[{1,6}],
RandomInteger[{1,6}],RandomInteger[{1,6}]}; Print[
Max[t]+Min[t]-Median[t]]]
4
3
6
5
```

Fælles opsamling

Simulering og sandsynlighed er traditionelt udfordrende emner, men de digitale værktøjer kan formidle mange mulige udfald, og på den måde anskueliggøre resultater af hypoteser. Regnearket og simulering har været element i de senere afgangsprøver og erfaringen har vist, at eleverne ikke virker fortrolige med hverken teknik eller fortolkning.

Brug af digitale værktøjer

Både regnearket og CAS-værktøjet kan være uvurderlige hjælpere på vej mod at finde svar - både med hensyn til kvalitet og kvantitet. Fokus kan flyttes fra arbejde beregninger til vurdering og forståelse af de resultater, værktøjerne producerer.

Talrækker

Matematik i grundskolen er et fag, hvor anvendelsen ofte er central, men i dette opslag er udgangspunktet ren matematik, hvor anvendelsen ikke bliver taget op, selvom arbejdet med talrækker har mange anvendelser.

Symbolet Σ (sigma) er kendt fra regneark, hvor det betyder, at man finder summen af de markerede celler. I matematik er Σ et symbol, der angiver en funktion, hvor man adderer efter bestemte betingelser.

Introduktion og iscenesættelse af elevernes arbejde

Introduktionen kan ske ved at give eleverne samme opgave som Gauss (Fortæl evt. historien om Gauss[1]). Måske er der nogle, som får den gode ide at lægge tallene sammen på denne måde: (1 +100) + (2 + 99) + ... + (50 + 51) = 50 · 101. Hvis det ikke sker, kan man starte med at skrive venstre side af regneudtrykket. Det vil få mange elever til at opdage metoden.

Elevernes undersøgende arbejde

Opgave 1

Beregningen kan fx klares på denne måde:
(2 +100) + (4 + 98) + ... + (50 + 52) = 25 · 102.
I CAS kan det skrives på denne måde:

$$\sum_{n=1}^{50} 2n = 2550$$

Opgave 2

Her er det overraskende resultat, at summen af et uendeligt antal tal bliver et endeligt tal. Eleverne vil godt kunne indse, at man nærmer sig 2, men hvorfor bliver resultatet ikke større end 2? Dette spørgsmål giver gode overvejelser.

Prøv evt. med 1 + $\frac{1}{3}$ + $\frac{1}{9}$ + $\frac{1}{27}$ ..., hvor resultatet bliver 1,5.

Opgave 3

Tallet π, som er forholdet mellem cirklens omkreds og diameter, fascinerer mange. Det skyldes bl.a., at det ikke muligt at angive en præcis værdi for π som et decimaltal eller en brøk. I opslaget om kvadratrødder blev det vist, at det er muligt at konstruere sig frem til et mål for kvadratroden af et tal. Det samme er umuligt for π, fordi π i modsætning til kvadratroden af et tal ikke er algebraisk, men transcendent.

De fleste vil umiddelbart kunne se systemet i Leibniz' talrække, hvor der skiftevis står plus og minus foran leddene. For at skifte mellem plus og minus i formlen udnytter vi at (-1) opløftet til henholdsvis et lige tal giver (+1) og et ulige tal giver (-1).

Når n = 11 vil udtrykket beregne π korrekt med 1 decimal, når n = 152 vil udtrykket beregne π korrekt med 2 decimaler, når n = 876 vil udtrykket beregne π korrekt med 3 decimaler og når n ≈ 18000, har man beregnet π korrekt med 4 decimaler.

I denne video[2] er vist, hvordan man kan bruge et CAS-værktøj til beregningen af π.

Formlen til beregning af en tilnærmet værdi for π kan omskrives til:

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \cdot \frac{4}{2i+1}$$

Fælles opsamling

Drøft forskellen på brug af summationstegnet i regnearket og i CAS-værktøjet, hvor det er en funktion, der giver værdien af en række additioner, mens summationen i regnearket adderer værdierne i bestemte celler.

Brug af digitale værktøjer

Et eksempel er betydningen af en bestemt summation, hvor man skal finde summen af de 5 første tal i 3-tabellen:

$$\sum_{n=1}^{5} 3n = 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 5$$

Alle CAS-værktøjer kan beregne værdien af et sådant udtryk.

Hvis man skriver udtrykket som vist herunder, beregner CAS-værktøjet en formel for summen af de n første tal i 3-tabellen.

$$\sum_{i=1}^{n} 3i = 1{,}5 \cdot n + 1{,}5 \cdot n^2$$

1) https://goo.gl/nT9aTw
2) https://goo.gl/M3qsUy

Matematik med it
Lærervejledning 2

Forfattere
Niels Jacob Hansen
Mikael Skånstrøm
Kirsten Søs Spahn

Redaktion
Jørgen Uhl Pedersen

Grafisk tilrettelæggelse
Bjørn Rasmussen · www.brgrafik.dk

Original CAS-grafik til temaerne
Forfatterne
Jørgen Uhl Pedersen

Tryk
Holm Print Management

Versionering til e-bog
Bjørn Rasmussen

ISBN: 978-87-93526-45-7

Forlaget Matematik
Nordby
8305 Samsø
mat.forlag@dkmat.dk
Tlf.: 8659 6022
www.dkmat.dk

Projektet *Matematik med it* støttes af
A. P. Møller og Hustru Chastine McKinney Møllers Fond til almene Formaal
Texas Instruments
Wolfram Research
Gladsaxe Kommune

Foto forside
Colourbox (plasticflasker og pige på cykel)
J. P. Valery, Unsplash (Tesla)
Bjørn Rasmussen (kystlinje med træ)