Talrækker

Da Carl Friedrich Gauss som 7-årig begyndte at gå i skole, var han rigtig god til at regne. For at beskæftige ham satte hans lærer ham til at lægge alle tal fra 1-100 sammen. Læreren tænkte, at nu var Carl beskæftiget for et stykke tid, men der gik kun et kort øjeblik før han kom med det korrekte resultat.

Carl Friedrich Gauss (1777-1855).

Wikimedia

Diskuter i fællesskab i klassen

- Hvordan vil I løse den udfordring, som Carl fik?
- Hvad bliver resultatet?

Carl brugte en metode, der er vist med dette regneudtryk:

$$\frac{(1+100)\cdot 100}{2}$$

- Forklar Carls metode.
- Hvordan kan man bruge Carls metode til at finde summen af de 1000 første naturlige tal?

Ved at bruge et CAS-værktøj kan man hurtigt løse samme type udfordringer, som Carl blev udsat for. I rammen nedenfor til højre er vist, hvordan CAS-værktøjet MatematiKan kan bruges.

- Σ er det græske bogstav sigma. Undersøg betydningen af tegnet Σ i regneudtrykket.
- Undersøg, hvordan du indtaster en lignende formel i det CAS-værktøj, som du bruger.

CAS-værktøjet kan også bruges til at finde en formel, som kan bruges til en beregning af summen.

- Hvilket resultat får du, hvis du erstatter n over sigma-tegnet med 200?
- Forklar sammenhængen mellem Carls metode og formlen nederst i rammen.

Summen af de første 1000 naturlige tal

$$\sum_{n=1}^{1000} n$$

500 500

Summen af de første n naturlige tal

$$\sum_{i=1}^{n} i$$

$$\frac{1}{2} n\,(1+n)$$

MatematiKan

Opgave 1

Summen af de første 50 lige tal kan skrives på denne måde: $2 + 4 + 6 + \ldots + 98 + 100$

- Forklar, hvordan du vil finde summen af de første 50 lige tal ved beregning.
- Brug et CAS-værktøj til at bestemme summen.
- Brug et CAS-værktøj til at finde en formel for summen af de n første lige tal.
- Brug et CAS-værktøj til at finde summen af alle 3-cifrede tal.

Opgave 2

Nogle talrækker vokser eller aftager ikke ubegrænset, når der tilføjes flere led til talrækken. Talrækken herunder nærmer sig et bestemt tal.

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} \ldots$

- Forklar, hvorfor talrækken også kan skrives på denne måde: $2^0 + 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + 2^{-4} + 2^{-5} \ldots$
- Forklar, hvorfor udtrykket i rammen til højre kan bruges om talrækken.
- Beregn værdien af udtrykket for forskellige værdier af n.

$$\boxed{\sum_{i=0}^{n} 2^{-i}}$$

Opgave 3

Der er mange som interesserer sig for tallet π, som er forholdet mellem omkreds og diameter i cirklen.

Det er ikke muligt at finde et decimaltal eller en brøk, som viser den præcise værdi af π, men man kan beregne π med lige så mange decimalers nøjagtighed, som man ønsker, hvis man har tid nok og en computer, der kan klare opgaven.

Matematikeren Leibniz fandt i 1673 ud af, at man kunne beregne π med talrækken herunder:

$\pi = \frac{4}{1} - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - \frac{4}{11} + \frac{4}{13} - \ldots$

- Skriv de næste 3 led i talrækken herover, og beregn en tilnærmet værdi for π.

Leibniz' formel kan også skrives på denne måde:

$$\pi = (-1)^0 \cdot \frac{4}{2 \cdot 1 - 1} + (-1)^1 \cdot \frac{4}{2 \cdot 2 - 1} + (-1)^2 \cdot \frac{4}{2 \cdot 3 - 1} + \cdots + (-1)^n \cdot \frac{4}{2 \cdot (n+1) - 1}$$

- Brug et CAS-værktøj til at undersøge, hvor mange led, der skal være i udtrykket for at π er beregnet med 1 decimals nøjagtighed, 2 decimalers nøjagtighed, 3 decimalers nøjagtighed og 4 decimalers nøjagtighed.

Beregning af en tilnærmet værdi for π

$$\text{pi} = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \cdot \frac{4}{2, \cdot (i+1) - 1}$$

MatematiKan

- Giv en forklaring på, at sigma ofte kaldes et summationstegn.
- Forklar betydningen af de forskellige tal og bogstaver i regneudtrykket i rammen.

$$\boxed{\sum_{n=1}^{10} 5 \cdot n}$$

- I hvilke situationer er det smart at bruge summation?

Egne noter

....

....