Matematik med it

2

Elevbog

Forlaget Matematik

Niels Jacob Hansen, Mikael Skånstrøm,
Kirsten Søs Spahn

Indhold

Bogen udgives med støtte fra
A. P. Møller og Hustru Chastine McKinney Møllers Fond
til almene Formaal

Forord

I denne bog er der 16 opslag. Her kommer du til at bruge CAS-værktøjer og andre it-værktøjer til undersøgelser og løsning af matematiske problemer.
CAS er en forkortelse for Computer Algebra System.
Et CAS-værktøj er et program, som fx kan
- udføre almindelige beregninger
- løse ligninger
- regne med og omskrive udtryk med bogstaver
- tegne grafer og diagrammer på baggrund af data

Alle opslag i bogen består af en venstre side og en højre side.
- Venstre side er et oplæg til klasse- og gruppesamtaler. Den indeholder også forskellige oplysninger, som du kan bruge, når du arbejder med opgaverne på højre side.
- Højre side indeholder opgaver og udfordringer, som du skal arbejde med ved at bruge et it-værktøj. De it-værktøjer, du kan bruge, er ofte nævnt i opgaverne, men du kan også selv vælge, hvilket it-værktøj du vil bruge.

Når du arbejder med opgaverne, skal du altid overveje:
- Hvilket problem skal jeg løse?
- Hvilke oplysninger har jeg?
- Hvilket it-værktøj kan jeg bruge?
- Kan opgaven løses uden brug af et it-værktøj?
- Hvordan fortæller jeg mine kammerater om, hvad jeg har fundet ud af?

Nederst på højre side er der på alle opslag to faste punkter:
- Der er en ramme, hvor du fx bliver opfordret til at overveje
  - de resultater, du har fundet.
  - dit valg af værktøjer.
  - din måde at løse opgaven på, og om der er andre måder at løse opgaven på.
- Nederst er der en ramme med et skrivefelt til dine egne notater. Her kan du fx skrive eksempler på, hvordan du brugte dit CAS-værktøj eller et andet it-værktøj, så du altid kan slå det op.

Køb af cykel

Anne-Mette vil gerne købe en ny cykel. Hun har sparet sammen, men vil lige undersøge, hvor hun får den bedste pris. Cyklen skal have bagagebærer, lås og lygter. Hun er også nødt til at købe en ny cykelhjelm, fordi den gamle er revnet.

Anne-Mette vil gerne begynde at cykle til skole. Hun skal cykle langt, så det er godt at have tøj, handsker og sko, der er beregnet til at cykle i. Hun kigger på udstyr hos cykelhandlerne, og vil forhandle med sælgerne om at få en god pris, hvis hun køber det hele i den samme butik.

Hun vil gerne have cykelhandleren til at købe hendes brugte cykel, så hun ikke bare skal køre den på genbrugsstationen eller sælge den privat.

Hun finder tre forskellige tilbud.

Tegning: Bjørn Rasmussen

Tilbud – Cykelhandler 1

Køb din nye cykel her og få 20 % rabat på cykelkurv, lygter, bagagebærer, cykelhjelm og andet cykeludstyr.

Priser mellem 5499 kr. og 6399 kr.

Vi giver op til 500 kr. for din gamle cykel.

Vejledende priser

Tilbehør

Cykelkurv	399,00 kr.
Lygter	168,00 kr.
Hjelm	675,00 kr.
Bagagebærer	169,00 kr.

Diverse udstyr

Cykelbukser (¾ lange, til forår/efterår)	749,00 kr.
Cykelshorts (med pude, til sommer)	569,00 kr.
Cykelbukser (lange, uden pude)	1199,00 kr.
Cykelbukser (lange, med pude)	1999,00 kr.
Løse ben (til korte og ¾ lange bukser)	399,00 kr.
Jakke	1599,00 kr.
Sko	749,00 kr.
Sko, tilbudspris (hvis købt sammen med lange bukser med pude)	349,00 kr.
Handsker	349,00 kr.
Handsker, tilbudspris (hvis købt sammen med løse ben)	259,00 kr.

Tilbud – Cykelhandler 2

Hvis du køber din nye cykel hos os, får du: Cykel, cykelkurv, bagagebærer, lås, forlygte og baglygte for 5799 kr.

I denne uge får du 23 % rabat på denne pris og 5 % rabat på øvrigt udstyr.

Tilbud – Cykelhandler 3

Tilbud på ny cykel: 4999 kr.
Du sparer 1300 kr.
Denne cykel har skærme.

Hvis du har brug for at dele din betaling op, tilbyder vi 10 eller 20 måneders RENTE- og OMKOSTNINGSFRI betaling.

Du skal opstille en beregningsmodel for hvert cykeltilbud og finde ud af, hvor mange penge, Anne-Mette har brug for, hvis hun skal have en ny cykel. Du skal også regne dit valg af andet udstyr med i prisen.

Opgave 1

- Lav en oversigt over, hvad Anne-Mette får med i prisen hos hver af de tre cykelhandlere.
- Undersøg, hvor hun får den største rabat - både som beløb og i procent.

Opgave 2

- Undersøg, hvad det koster at købe cykel med tilbehør hos hver af de tre cykelhandlere.

Foto: Colourbox

Opgave 3

- Brug et CAS-værktøj og oplysningerne fra opgave 1 og 2 til at opstille modeller for hvert af de tre cykeltilbud.
- Sammenlign de tre tilbud, og argumenter for det valg, du vil anbefale.

Opgave 4

- Brug nu dine modeller til at undersøge:
  - Hvad skal ændres i et af de andre tilbud, hvis du skal ændre din anbefaling?
  - Hvad skal Anne-Mette sælge sin brugte cykel for, hvis hun gerne vil benytte tilbud nr. 2 og samtidig betale det samme som et af de andre tilbud?

- Hvad skulle du finde ud af?
- Hvordan løste du problemet?
- Kunne problemet løses med et andet it-værktøj?

Egne noter

....

....

....

....

....

....

....

....

Fra Skagen til Gedser i bil

Gert skal køre fra Skagen, hvor han bor, til Gedser for at besøge sin gamle ven Jørgen.

Inden han tager af sted henter han en rutevejledning, hvor han både får at vide, hvor langt han skal køre, og hvor lang tid turen vil tage.

På kortet kan Gert se, at turen er på 551 km, og at det vil tage 5 timer og 57 minutter at køre fra Skagen til Gedser.

Bag dette resultat må der være en matematisk model, som beregner både rejsetid og vejlængder.

Gert er ikke tilfreds med modellen, så din opgave er at konstruere en mere retvisende model. Gert oplyser, at han har en elektrisk bil med et batteri til 350 km kørsel.

Diskuter følgende spørgsmål i klassen:

- Hvilke oplysninger skal man kende for at kunne beregne rejsetiden?

- Hvis man på et bestemt vejstykke kender gennemsnitsfarten og vejstykkets længde, hvordan kan man så beregne tidsforbruget ved at gennemkøre vejstykket?

Til højre er vist, hvordan en matematisk model kan se ud, hvis man bruger et CAS-værktøj til at besvare en anden, men lignende problemstilling.

- Analyser modellen, og redegør for de forskellige variable i modellen. Du skal også overveje, om der skal indgå flere variable.

Vejlængder

motorvej:=100· _km

landevej:=50· _km

by:=10· _km

Hastigheder

hast_motorv:=110· _kph

hast_landev:=75· _kph

hast_by:=45· _kph

Tid

pauser:=30· _min

Beregning af rejsetid

$$\textbf{tid}:=\textbf{pauser}+\frac{\textbf{motorvej}}{\textbf{hast\_motorv}}+\frac{\textbf{landevej}}{\textbf{hast\_landev}}+\frac{\textbf{by}}{\textbf{hast\_by}}=8272.73\cdot\_s$$

$$\textbf{timer}:=\frac{\textbf{tid}}{3600\cdot\_s}=2.29798$$

$$\textbf{minutter}:=\frac{\textbf{tid}}{60\cdot\_s}-\mathrm{iPart}(\mathbf{t})\cdot 60=17.8788$$

Rejsetiden for de 160.· _km bliver 2. timer og 18. minutter

TI-Nspire CAS

Du skal opstille en model, der kan bruges til at beregne rejsetid mellem to steder, hvis man kender alle de variable, der påvirker rejsetiden.

Opgave 1

- Lav en liste med forskellige vejtyper.
- Undersøg, hvilken gennemsnitshastighed man regner med på forskellige vejtyper.

Opgave 2

- Undersøg, hvor mange kilometer der bliver kørt på hver af de forskellige vejtyper, når man kører fra Skagen til Gedser.

J. P. Valery, Unsplash

Opgave 3

- Brug oplysningerne fra opgave 1 og opgave 2 og oplysningerne om Gerts bil til at opstille en beregning i et CAS-værktøj.
- Sammenlign og vurder, om din beregnede rejsetid for ruten passer med den rejsetid, som rutevejledningen giver.
- Overvej, hvorfor der er forskel på din og ruteplanens rejsetid.

Opgave 4

- Brug nu din beregningsmodel til at undersøge, hvad der sker hvis
  - hastigheden ændres på nogle af vejtyperne?
  - modellen justeres, så der bliver taget højde for hastighedsbegrænsninger på grund af vejarbejde?
  - man vil køre en anden strækning?

- Hvad står enhederne km, h, min, s og kph for?
- Hvilken enhed beregner programmet tid i?
  - I programmet bruges en særlig funktion, der hedder iPart(). iPart står for *integer part* af et tal. Oversat til dansk betyder det *heltalsdelen af et tal*.
- Hvilken funktion har udtrykket i rammen til højre? $\boxed{\text{iPart}\left(\frac{\text{tid}}{3600 \cdot \text{s}}\right)}$
- Hvordan passer din løsning med virkeligheden?

Egne noter

....

....

....

....

At spare op

9. A's opsparing

9. A vil spare op til *Sidste Skoledag*.
Opsparingen vil vare i 9 måneder – fra september til maj.
I klassen er der 21 elever og hver elev giver 30 kr. om måneden til opsparingen.

- Hvor meget har de sparet op i perioden på de 9 måneder?

Tegning: Bjørn Rasmussen

elever=21; månedsbeløb=30 kr; måneder=9
Den samlede opsparing over 9 måneder bliver:
opsparing=elever·månedsbeløb·måneder
5670 kr

MatematiKan

- Undersøg, hvor meget hver elev skal give om måneden, hvis de vil have sparet 5000 kr. op på 9 måneder.

9. B's opsparing

9. B vil også spare op til *Sidste Skoledag.*
De opretter et regneark, så de kan beregne, hvor meget de kan spare op.
Hvis alle elever giver 25 kr. om måneden, har de næsten 6000 kr. til maj.

	A	B	C
1	Kr./md.	25	
2	Antal elever	26	
3			
4	September	650	650
5	Oktober	650	1300
6	November	650	1950
7	December	650	2600
8	Januar	650	3250
9	Februar	650	3900
10	Marts	650	4550
11	April	650	5200
12	Maj	650	5850

	A	B	C
1	Kr./md.	25	
2	Antal elever	26	
3			
4	September	650	=B4
5	Oktober	650	=C4+B5
6	November	650	=C5+B6
7	December	650	=C6+B7
8	Januar	650	=C7+B8
9	Februar	650	=C8+B9
10	Marts	650	=C9+B10
11	April	650	=C10+B11
12	Maj	650	=C11+B12

Foto: Colourbox

- Opret et regneark som klassens og brug det til at finde ud af:
  - Hvor mange penge får de sparet op, hvis alle elever giver 20 kr. i stedet for 25 kr.?
  - Hvor mange kroner skal de hver især give, hvis de blot skal bruge 4000 kr.?

I 9. A er der 21 elever.

- Hvor mange kroner skal de hver give pr. måned, hvis de skal have samme samlede beløb som 9. B?

På sin 16 års fødselsdag vælger Saga at begynde at spare op til et kørekort.
Hun regner med, at kørekortet vil komme til at koste 12 000 kr.
Hun har 5000 kr. stående på en konto fra sin konfirmation.
De næste 12 måneder vil hun sætte et beløb ind på sin konto hver måned.

Opgave 1

Saga sætter 400 kr. ind på sin konto hver måned.

- Hvor mange kroner står der i alt på Sagas konto efter 12 måneder?

Opgave 2

Sagas morfar vil bidrage med restbeløbet til kørekortet den dag, hun fylder 17.
Saga opstiller tre regneudtryk, der skal vise, hvor meget hendes morfar skal betale.

$$12000 - morfar = 12 \cdot 400$$
$$12 \cdot 400 + 5000 + morfar = 12000$$
$$12 \cdot 400 + morfar - 5000 = 12000$$

- Vis ved hjælp af et CAS-værktøj, hvilket af de tre regneudtryk, der er det rigtige.

Opgave 3

Saga laver et regneark, så hun kan holde øje med saldoen på sin konto.
I det gule felt taster hun det beløb, hun vil sætte ind hver måned.
I det grønne felt kan hun se den endelige saldo.

- Opret et regneark som Sagas.
  I regnearket skal du beregne saldoen, hvis Saga sætter 500 kr. ind hver måned.
- Hvilket beløb skal Saga sætte ind hver måned, hvis hun vil have, der skal stå 13 000 i det grønne felt.
- Saga sætter så mange penge ind, at hun når de 13 000 kr. allerede i januar. Hvor mange penge har Saga sat ind hver måned?

Hver måned		400		
			Indsat	Saldo
Fra konfirmationen				5000
Fødselsdag 16				
		April	400	5400
		Maj	400	5800
		Juni	400	
		Juli	400	
		August	400	
		September	400	
		Oktober	400	
		November	400	
		December	400	
		Januar	400	
		Februar	400	
Fødselsdag 17		Marts	400	
		I alt		

- Hvordan sparer du selv op?
- Hvad sker der med opsparingen, hvis Saga får renter på sin saldo?

Egne noter

....

....

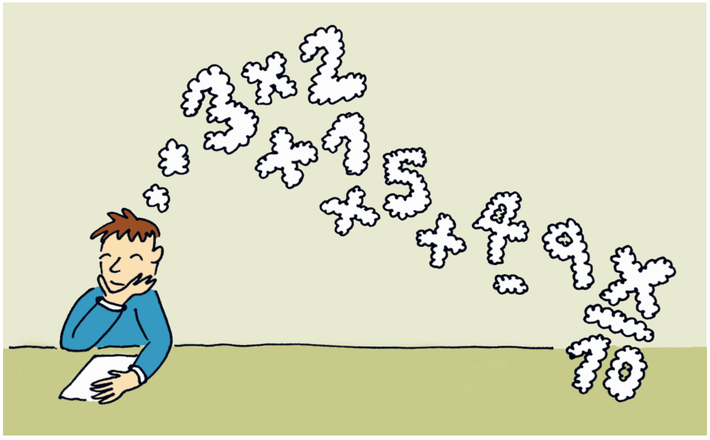
Mat_med_IT_Elevbbog_2_indhold.indd 9 19/11/2018 09.55

Regneopskrifter

En regneopskrift er en trinvis beskrivelse, hvor det bliver forklaret, hvordan man skal regne. Ved at følge opskriften, kommer man frem til et resultat.

Diskuter følgende spørgsmål

- Hvorfor er det muligt at forudsige resultatet af en regneopskrift?



Tegning: Lærke Thordsen

Ved hver regneopskrift skal du følge denne fremgangsmåde:

- Det resultat, som du får i en linje, skal du regne videre med i næste linje.
- Prøv hver regneopskrift flere gange ved at regne i hovedet.
- Læg mærke til og beskriv, om der er noget specielt ved resultatet.

Regneopskrift 1

- Tænk på et tal
- Gang med 2
- Læg 14 til
- Divider med 2
- Træk tallet du tænkte på fra
- Hvilket resultat får du?

Regneopskrift 2

- Tænk på et tal
- Gang med 2
- Læg 1 til
- Gang med 5
- Læg 4 til
- Træk 9 fra
- Divider med 10
- Hvilket resultat får du?

Regneopskrift 3

- Tænk på et tal
- Læg 10 til
- Gang med 2
- Træk 6 fra
- Divider med 2
- Træk tallet du tænkte på fra
- Hvilket resultat får du?

Regneopskrift 4

- Tænk på et tal
- Gang tallet med sig selv
- Træk 1 fra
- Divider med tallet du tænkte på plus 1
- Læg 1 til
- Hvilket resultat får du?

- Du kan bruge et CAS-værktøj til at undersøge en regneopskrift. Til højre er vist et eksempel i TI-Nspire CAS.

$\mathbf{tal}:=8$

$\mathbf{linje1}:=\mathbf{tal}+3 \quad = 11$

$\mathbf{linje2}:=\mathbf{linje1}\cdot 6 \quad = 66$

$\mathbf{linje3}:=\mathbf{linje2}-12 \quad = 54$

$\mathbf{linje4}:=\dfrac{\mathbf{linje3}}{6} \quad = 9$

$\mathbf{slut}:=\mathbf{linje4}-1 \quad = 8$

Opgave 1

- Brug et CAS-værktøj til at undersøge hver af de fire regneopskrifter. Du skal prøve med forskellige tal.
- Hvis du ikke får de samme resultater med CAS- værktøjet, som når du regner i hovedet, skal du undersøge hvorfor.
- Undersøg, hvilket resultat CAS-værktøjet giver, hvis du erstatter tallet du tænkte på med en variabel. Du kan fx kalde den variable for a.

Opgave 2

- Giv en sproglig beskrivelse af regneopskriften i eksemplet, hvor der er brugt et CAS-værktøj.
- Forklar, hvorfor regneopskriften i eksemplet svarer til regneudtrykket $\frac{(a+3)\cdot 6-12}{6} - 1$.

Opgave 3

- Omskriv hver af regneopskrifterne 1-4 til regneudtryk.
- Reducer hvert af de fire regneudtryk ved omskrivning på et stykke papir og ved brug af et CAS-værktøj.

Opgave 4

- Konstruer to forskellige regneopskrifter.
- Undersøg opskrifterne i et CAS-værktøj.
- Få nogle klassekammerater til at undersøge dine regneopskrifter.

- Hvilke matematiske områder har du arbejdet med?
- Hvilke regneregler har du brugt?
- Kunne de matematiske problemer løses på flere måder?
- Hvorfor kan to regneudtryk, som ser forskellige ud give samme værdi.
- Hvorfor er det muligt at forudsige resultatet, når man følger en regneopskrift.

Egne noter

....

....

....

....

....

....

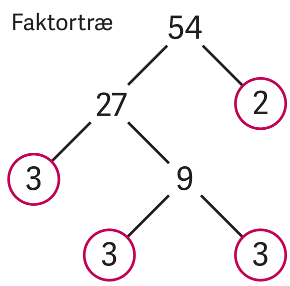
Faktorisering

I matematik anvender vi ofte udtrykket at gå op i, når et naturligt tal kan deles med et andet naturligt tal, og resultatet også bliver et naturligt tal.
2 går op i 6 fordi $6 : 2 = 3$.
2 går ikke op i 5, fordi divisionen giver 1 som rest: $5 : 2 = 2 \cdot 2 + 1$.
Både 2 og 3 er divisorer i 6, fordi de begge går op i 6.
De to andre divisorer i 6 er 1 og 6. Tallet 6 har altså i alt fire divisorer.

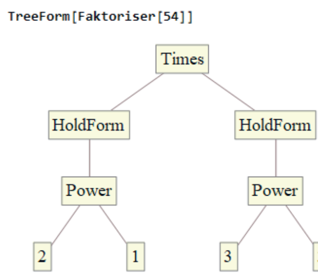
Primtal
Tal, der kun har 2 divisorer, kaldes primtal.
Primtal har kun 1 og tallet selv som divisorer.
17 er et primtal, fordi der ikke er andre tal end 1 og 17, der går op i 17: $17 = 1 \cdot 17$.

Sammensatte tal
De tal, der ikke er primtal, kaldes sammensatte tal.
Sammensatte tal har flere end to divisorer.
6 er et sammensat tal med fire divisorer: 1, 2, 3 og 6.
Tallet 45 har seks divisorer: 1, 3, 5, 9, 15 og 45.

Faktortræ



Opløsning i primfaktorer
Et tals divisorer kan findes ved at opløse tallet i primfaktorer.
Opløsningen kan fx laves ved hjælp af et faktortræ.
Tallet 54 er opløst i primfaktorer: $54 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 2 \cdot 3^3$.
- Hvordan skal faktortræet, Treeform, lavet i MatematiKan, læses?



MatematiKan

Primfaktorerne anvendes til at finde tallets divisorer ved at multiplicere dem.

Tallet 54 har 8 divisorer, dvs. 8 tal som går op i 54.
Tallets mindste divisor er 1 og den største er 54.
2 og 3 går også op i 54.
- Find de fire andre divisorer, der går op i 54.

CAS-værktøjer
Forskellige CAS-værktøjer har forskellige syntakser – her TI-Nspire CAS og MatematiKan.

factor(54) $2 \cdot 3^3$ TI-Nspire CAS	Faktoriser[54] $2^1\ 3^3$ MatematiKan

Opgave 1
- Tegn et faktortræ for tallet 48.
- Hvilke primfaktorer indgår i tallet 48?
- Hvilke divisorer har tallet 48?

Opgave 2
- Opløs disse tal i primfaktorer ved hjælp af et CAS-værktøj:
  2, 12, 19, 22, 25, 36, 45 og 48.

Opgave 3
I taltavlen nedenfor er tallene 1, 2, 16, 22, 36, 45 og 49 markeret med farver, der viser hvor mange divisorer tallene har.
Tallet 16 har 5 divisorer og 49 har 3 divisorer.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

Antal divisorer:

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14

- Konstruer en taltavle med tallene fra 1 til 50 og undersøg disse påstande:
  - Det største antal divisorer, der forekommer i taltavlen, er 10.
  - Kvadrattallene har alle et ulige antal divisorer.
  - Der er flest primtal i taltavlen.

Opgave 4
I et CAS program fås disse svar med funktionerne sfd og mfm:

sfd[22,36,48] = 2, sfd[24,48] = 24, sfd[100,210] = 10, sfd[13,31] = 1,
mfm[22,36,48] = 1584, mfm[24,48] = 48, mfm[100,210] = 2100, mfm[13,31] = 403.

MatematiKan

- Undersøg, hvad det er, CAS-værktøjer beregner og giv tre andre eksempler.

- Gav CAS-værktøjet løsninger, du blev overrasket over?
- Kan du anvende CAS funktionerne til løsning af andre typer opgaver?
- Du kan designe en præsentation, der viser resultaterne af dine undersøgelser.

Egne noter

....

....

Statistik

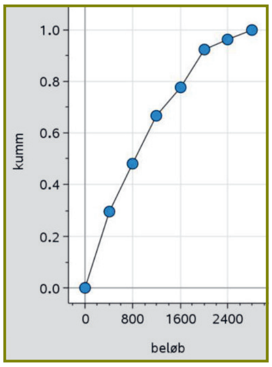
Afstand fra hjem til skole

Eleverne i en klasse har målt afstanden fra hjem til skole.
De 20 elever lægger alle afstandene sammen og beregner middeltallet til 800 m.

- Den elev, der bor tættest på, har kun 100 m til skole.
  Brug et digitalt værktøj til at undersøge, hvor langt hver af de andre 19 kan have til skole, når ingen af dem har lige langt,

Lommepenge

Sumkurven til højre viser, hvor mange penge eleverne i en klasse har til rådighed hver måned. Nogle af dem får lommepenge af deres forældre, andre har et fritidsjob – så der er stor forskel.



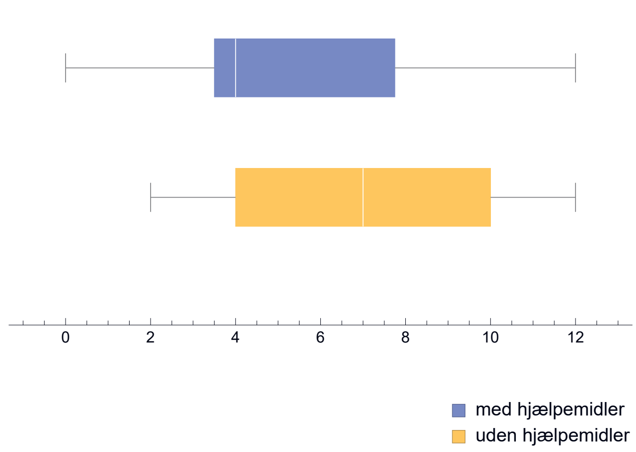
TI-Nspire CAS

Diskuter i fællesskab følgende påstande i klassen

1) Den, der har flest penge til rådighed, har 2000 kr.
2) Over halvdelen af eleverne har mere end 800 kr.
3) 10% af eleverne har mere end 1600 kr. til rådighed.

Karaktererne

Boksplottene herunder viser, hvordan en klasse har klaret terminsprøven i de to prøveformer – den ene med og den anden uden hjælpemidler.



med hjælpemidler	
Mindste observation	0
Største observation	12
Variationsbredde	12
Nedre kvartil	3,500
Median	4
Øvre kvartil	7,750
Middelværdi	5,765
Typetal	{4}

uden hjælpemidler	
Mindste observation	2
Største observation	12
Variationsbredde	10
Nedre kvartil	4
Median	7
Øvre kvartil	10
Middelværdi	6,529
Typetal	{4}

MatematiKan

- Giv et forslag til en række karakterer, der giver samme middeltal i prøven med hjælpemidler som prøven uden hjælpemidler: 6,5.

Indsamling af flasker

En klasse med 24 elever samler flasker til en skoletur.
Hver måned registrerer de i et skema hvor mange flasker, de har samlet tilsammen:

Måned	Aug	Sep	Okt	Nov	Dec	Jan	Feb	Mar	Apr	Maj
Antal	37	58	113	149	199	127	145	200	249	173
I alt	37	95	208							

Opgave 1

- Beregn, hvor mange flasker eleverne i gennemsnit har samlet hver måned.

Opgave 2

- Tegn et diagram i et CAS-værktøj, der viser fordelingen på de 10 måneder.

Opgave 3

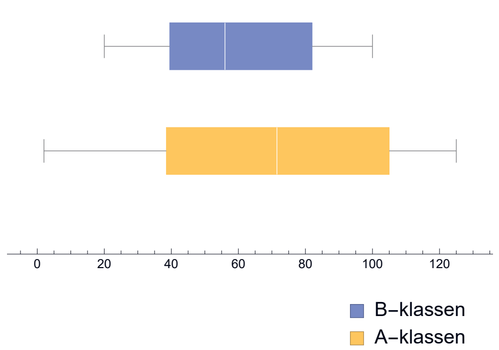
- I skemaet øverst på siden er påbegyndt en sammentælling. Fuldfør denne.
- Vis den i et diagram i et CAS-værktøj.
- Aflæs, hvornår klassen havde nået at samle halvdelen af det endelige antal.

Opgave 4

Parallelklassen har også samlet flasker og de to klasser sammenligner hinandens tal i et boksplot. Se rammen til højre.

Klasserne har indtastet, hvor mange flasker hver enkelt elev har samlet.

- Brug diagrammet til at undersøge disse påstande:
  1) I A-klassen er variationsbredden på de indsamlede flasker mindre end i B-klassen.
  2) Den elev der har samlet flest flasker går i A-klassen.
  3) Den elev der har samlet færrest flasker går i A-klassen.



B-klassen	
Mindste observation	20
Største observation	100
Variationsbredde	80
Nedre kvartil	39,500
Median	56
Øvre kvartil	82
Middelværdi	60,438
Typetal	{34, 56, 78}

A-klassen	
Mindste observation	2
Største observation	125
Variationsbredde	123
Nedre kvartil	38,500
Median	71,500
Øvre kvartil	105
Middelværdi	73,000
Typetal	{37, 125}

MatematiKan

- Er der andre typer diagrammer, der kan bruges til at vise fordelingen mellem klasserne?

Egne noter

....

....

Ligninger og ligningssystemer

Ved løsningen af et matematisk problem eller et problem fra virkeligheden er det nogen gange nødvendigt at løse en ligning eller et ligningssystem. Der findes flere forskellige metoder, som man kan bruge ved løsning af ligninger.

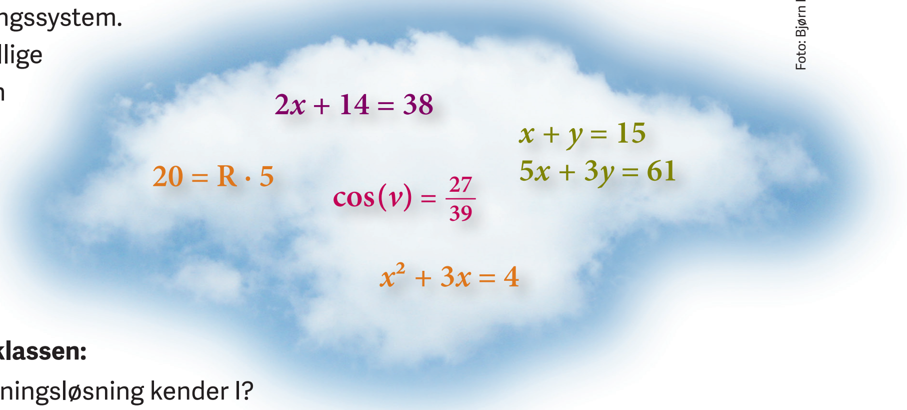


Foto: Bjørn Rasmussen

Diskuter i fællesskab følgende spørgsmål i klassen:

- Hvilke metoder til ligningsløsning kender I?
- Hvordan vil I løse ligningerne i skyen?
- Hvilke situationer kan hver af de fire ligninger i skyen beskrive?
- Hvilke situationer kan ligningssystemet i skyen beskrive?
- I hvilke virkelige situationer har man brug for at kunne løse en ligning?

I arbejdet med ligninger skal man modellere og problemløse, når man skal oversætte en situation til en ligning, eller man skal fortolke en ligning som en beskrivelse af en bestemt situation.

Arbejdet med at løse ligningerne kan klares ved at følge en bestemt fremgangsmåde eller ved at bruge et CAS-værktøj.

Herunder er vist, hvordan TI-Nspire CAS kan bruges til at løse forskellige ligninger og et ligningssystem.

- Undersøg, hvordan du skal indtaste ligninger i det CAS-værktøj, som du bruger.

I eksemplet er vist, hvordan TI-Nspire CAS både kan løse en ligning med en eksakt værdi og en tilnærmet værdi.

- Undersøg, hvordan det CAS-værktøj, du bruger, kan løse ligninger med både en eksakt værdi og en tilnærmet værdi.

$\text{solve}(5\cdot x-17=86,x)$	$x=\frac{103}{5}$
$\text{solve}(5\cdot x-17=86.,x)$	$x=20.6$
$\text{solve}(2\cdot x^2+5\cdot x=12,x)$	$x=^-4 \text{ or } x=\frac{3}{2}$
$\text{solve}(2\cdot x^2+5\cdot x=12.,x)$	$x=^-4. \text{ or } x=1.5$
$\text{solve}\left(\begin{cases}3\cdot x-2\cdot y=88\\x+y=17\end{cases},x,y\right)$	$x=\frac{122}{5} \text{ and } y=\frac{^-37}{5}$
$\text{solve}\left(\begin{cases}3\cdot x-2\cdot y=88\\x+y=17.\end{cases},x,y\right)$	$x=24.4 \text{ and } y=^-7.4$

Opgave 1

Brug et CAS-værktøj til at løse de to ligninger og ligningssystemet.

- $2x + 3 = 5(x - 4) + 2$
- $3x^2 + 17x - 27 = 19$
- $7a + 3b = 75 \wedge 9a - 5b = 14$

Opgave 2

Nanna og Arthur har tilsammen 432 kr. Arthur har 97 kr. mere end Nanna.

- Beskriv situationen herover med en ligning.
- Løs ligningen, og forklar, hvad løsningen viser.

Opgave 3

Mikkel afleverer tomme flasker og dåser i flaskeautomaten.
Han ved, at han i alt afleverer 52 flasker og dåser, og at han i alt får udbetalt 62,50 kr.
Mikkel afleverer kun flasker og dåser med pantmærke A eller B.

- Beskriv situationen herover med to ligninger med to ubekendte.
- Løs ligningssystemet, og forklar hvad løsningen viser.

Opgave 4

- Beskriv et problem, som kan løses ved at opstille en ligning med en ubekendt.
- Opstil en ligning, der løser problemet.
- Byt problem med en klassekammerat, opstil ligninger, og løs de opstillede problemer.

Opgave 5

- Beskriv et problem, der kan løses ved at opstille et ligningssystem med flere ligninger og flere ubekendte.
- Løs problemet ved at opstille et ligningssystem og løse det.
- Byt problem med en kammerat, opstil ligninger, og løs de opstillede problemer.

- Hvad kendetegner en ligning?
- Hvad er et ligningssystem?
- I opgave 1 indgår symbolet $\wedge$. Hvad betyder det?
- Kender du andre tegn af den type?
- Hvad er en ubekendt?
- Hvad er en eksakt løsning/en tilnærmet løsning?

Egne noter

....

....

Talfølger og figurfølger

En talfølge er en liste af tal skrevet i en bestemt rækkefølge.
En figurfølge er en række af figurer tegnet i en bestemt rækkefølge.

Talfølger

Et eksempel på en talfølge er 5-tabellen, hvor tallene 5, 10, 15, 20, 25 ... er starten på en uendelig følge af tal, hvor forskellen mellem hvert tal og det efterfølgende tal er 5.

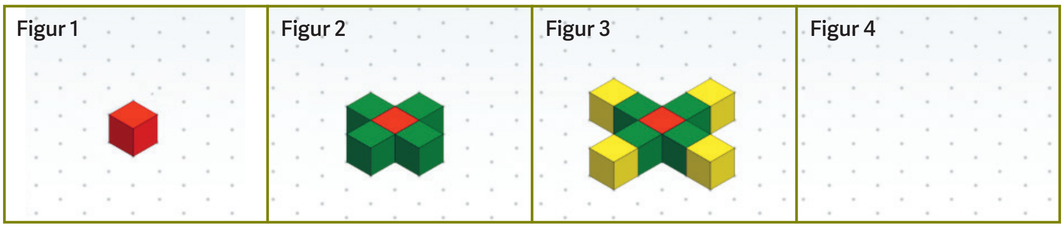
En anden talfølge udvikler sig på denne måde:

Talnummer	1	2	3	4	5	6	7	8
Talfølge	3	6	9	12	15			

- Skriv de næste 3 tal i talfølgen.

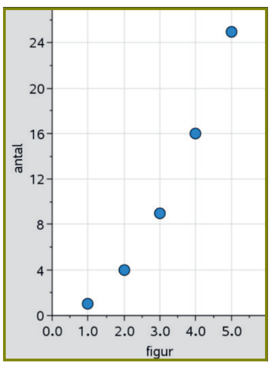
Figurfølger

En figurfølge udvikler sig på denne måde:



- Tegn den næste figur i figurfølgen og skriv antallet af kuber i skemaet.

Figurnummer	1	2	3	4	5	6	7	8
Antal	1	5	9					



I diagrammet til venstre er antallet af kuber i en figurfølge vist i TI-Nspire CAS.
Punkterne ligger på grafen af $f(x) = x^2$

- Skriv i skemaet det antal, der svarer til punkterne.

Figurnummer	1	2	3	4	5	6	7
Antal	1						

- Tegn et forslag til en figurfølge, der passer til tallene i skemaet.

Opgave 1

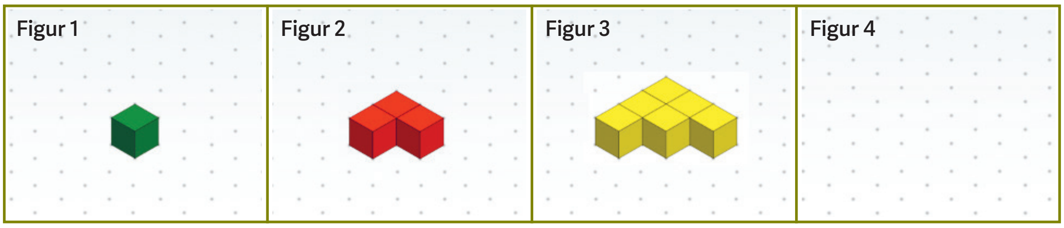
- Skriv de næste tre tal i hver talfølge i skemaet til højre:

	1	2	3	4	5	6	7
A	1	8	27	64			
B	2	5	10	17			
C	1	7	17	31			

Opgave 2

- Indsæt sammenhængene fra A, B og C i et diagram i et CAS-værktøj og find funktionsforskrifterne, der beskriver hver af talfølgerne.

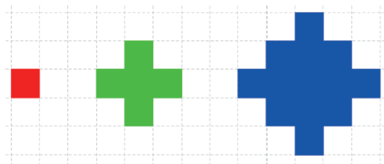
Opgave 3



- Tegn Figur 4 i skemaet ovenfor på isometrisk papir.
- Indsæt sammenhængen mellem figurnummer og antal kuber i et skema.
- Brug et CAS-værktøj til at finde en funktionsforskrift, der viser sammenhængen mellem figurnummer og antal kuber.

Opgave 4

- Hvor mange kvadrater består figur 4 af?
- Brug et CAS-værktøj til at finde en funktionsforskrift, der viser sammenhængen mellem figurnummer og antal kvadrater.



Figur 1 Figur 2 Figur 3 Figur 4

- Overvej, hvordan matematikken i talfølgerne og figurfølgerne bedst vises: som tegning, som tabel, i et skema, som punktgraf eller som en funktionsforskrift.
- Er du tilfreds med de funktionsforskrifter, CAS-værktøjet fandt i hver opgave?

Egne noter

....

....

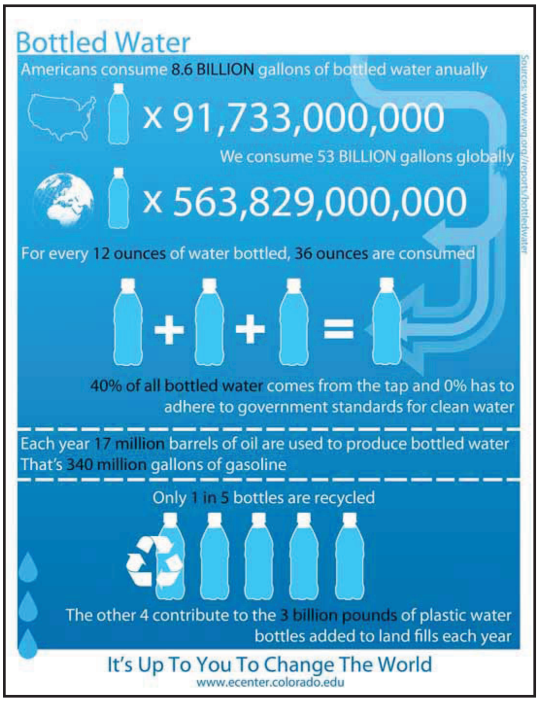
....

Vand på flaske

I Danmark og resten af verden sælges der masser af vand, som er tappet på flaske. Den blå plakat herunder til højre viser salget af vand på flaske i hele verden og i USA.

I tabellen herunder er nogle faktaoplysninger, som du kan bruge til forskellige sammenligninger.

USA's befolkningstal	326 000 000
Verdens befolkningstal	7 530 000 000
Danmarks befolkningstal	5 800 000
1 US gallon	3,78541 L
1 barrel olie	158,9873 L
1 ounce	28,34952 g
1 pound	453,592 g
1 billion US (1 milliard DK)	1 000 000 000
Salg af vand på flaske i Danmark	117 000 000 liter
Olieproduktion i USA pr. dag	14 900 000 barrels
Olieproduktion i Danmark pr. år	9 mio. m³



Kilde: http://oceancrusaders.org og ecenter.colorado.edu

Tabellen til højre viser, hvor mange procent af engangsemballagen til drikkevarer, der blev returneret i Danmark i 2017

Emballagetype 2017		
Engangs-emballage	Plast	93%
	Metal	87%
	Glas	88%

Kilde: Bryggeriforeningen

Diskuter i fællesskab følgende spørgsmål i klassen

- Hvilke oplysninger kan man direkte aflæse i den blå plakat fra oceancrusaders.org?
- Hvordan kan man beregne vandforbruget ved produktion af vand på flaske?
- Hvilke andre forhold er det muligt at beregne ud fra oplysningerne på illustrationen og i tabellerne?
- Hvilke sammenligninger vedrørende forbruget af vand på flaske synes I, det kunne være interessant at foretage?
- Hvordan I vil bruge CAS-værktøjer og andre digitale værktøjer til forskellige sammenligninger af vandforbruget?

Opgaverne på denne side skal I løse ved at arbejde sammen i grupper på 3-4. Når I har løst opgave 1-2 skal I lave en præsentation af jeres arbejde, som efter nærmere aftale med jeres lærer skal vises for klassen.

Opgave 1

I skal sammenligne forbruget af vand tappet på flaske i USA med forbruget af vand tappet på flaske i hele verden og med forbruget i Danmark.

- Beskriv først, hvilke ting I vil sammenligne.
- Hvilke oplysninger skal I bruge for at kunne lave jeres sammenligning?
- Find de nødvendige oplysninger på venstre side eller søg oplysningerne andre steder.
- Udfør de beregninger, som er nødvendige, når I skal foretage sammenligningen.
- Illustrer på passende måde jeres sammenligninger med tabeller, diagrammer eller beregninger.

Opgave 2

I skal vælge en anden problemstilling, som kan besvares ud fra de oplysninger, der er på venstre side. I besvarelsen skal indgå:

- Hvilken problemstilling I har arbejdet med.
- Beregninger
- Illustrationer
- Jeres svar på problemstillingen.

Foto: Colourbox

- Hvilke ting kan være vigtige at overveje, når man skal sammenligne to forhold?
- Hvordan kan et CAS-værktøj være et godt hjælpemiddel, når man skal sammenligne forskellige tal?
- Hvordan kan samme oplysninger præsenteres på forskellige måder i diagrammer og grafer?

Egne noter

....

....

....

....

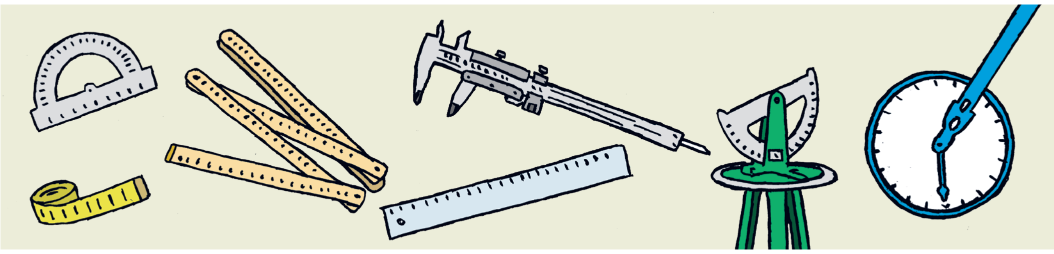
....

....

Beregning af usikkerhed

Otto og Sonja skal bestemme arealet af et område, hvor der skal være en græsplæne ved familiens nye hus. Da græsplænen næsten har form som et rektangel, måler de længde og bredde med et meterhjul.

Længden af græsplænen måler de til 18,1 m og bredden måler de til 8,3 m. De beregner arealet af græsplænen til 150,23 m^2.



Tegning: Bjørn Rasmussen

Diskuter i fællesskab følgende spørgsmål i klassen:

- Hvorfor kan man ikke være sikker på, at græsplænens areal er præcis 150,23 m^2?
- Hvor præcist kan man måle en afstand med et meterhjul?
- Hvad er den mindste bredde, som græsplænen kan have?
- Hvad er den største længde, som græsplænen kan have?
- Hvordan kan man gøre målingen mere præcis?

Otto og Sonja bruger et CAS-værktøj til at undersøge, hvor præcist man kan angive størrelsen af arealet, når man ikke kan måle helt præcist.

I den beregning, der er vist til højre, har de regnet med, at længdemålene kan være 20 cm kortere eller længere end de målte længder. Dette tal kalder man for måleusikkerheden.

- Hvilket svar skal Sonja og Otto give, hvis de bliver spurgt om, hvor stort arealet er af det område, hvor der skal være græsplæne?
- Brug et CAS-værktøj til at undersøge, hvor præcist man kan angive arealet af græsplænen, hvis måleusikkerheden er større eller mindre end 20 cm.

Målinger

længde:=18.1·_m

bredde:=8.3·_m

Måleusikkerhed

u:=0.2·_m

Beregninger

areal:=**længde**·**bredde** = 150.23·_m 2

arealmax:=(**længde**+**u**)·(**bredde**+**u**) = 155.55·_m 2

arealmin:=(**længde**−**u**)·(**bredde**−**u**) = 144.99·_m 2

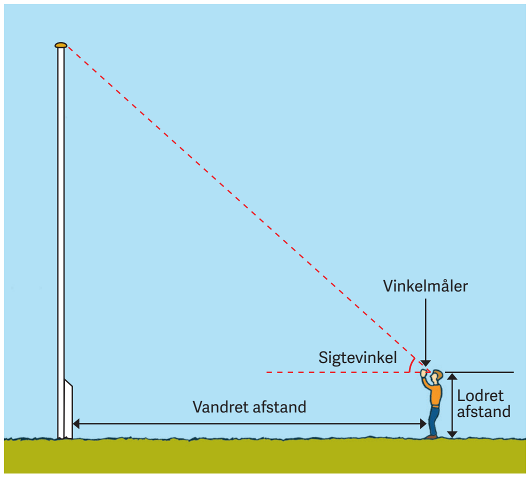
TI-Nspire CAS

Opgave 1

- Brug forskellige måleredskaber og mål længde og bredde af forskellige rektangulære områder. Det kan fx være en tændstikæske, skolebordet eller en fodboldbane.
- Vurder ved hver måling, hvor præcist du kan måle, og angiv måleusikkerheden.
- Beregn arealet af områderne, og redegør i hvert tilfælde for, hvor præcist du kan angive arealet.

Opgave 2

- Tag de nødvendige mål på nogle cylinderformede genstande.
- Angiv måleusikkerheden ved hver måling.
- Bestem et interval for både overfladeareal og rumfang af hver genstand.
- Forklar, hvor præcist det er muligt at angive areal og rumfang for hver af de undersøgte genstande.



Opgave 3

I skal bestemme højden af skolens flagstang ved måling af sigtevinkel, lodret afstand og vandret afstand.

- Hvor stor er måleusikkerheden for hver af de tre målinger?
- Bestem et interval for flagstangens højde.
- Overvej, hvilken af de tre måleusikkerheder, der har størst betydning for usikkerhedsintervallets størrelse.
- Undersøg ved beregning, hvilken af de tre måleusikkerheder, der har størst betydning.

- Hvad er måleusikkerhed?
- Hvilken betydning har valget af måleredskab for måleusikkerheden?
- Hvor præcist kan man angive et resultat, som bygger på flere målinger?
- Hvad er et usikkerhedsinterval?
- Hvordan kan man beregne et usikkerhedsinterval?

Egne noter

....

....

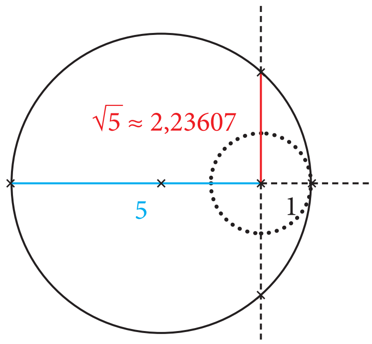
....

....

Bestemmelse af tilnærmet værdi for kvadratroden af et tal

Kvadratroden af et tal defineres som det ikke-negative tal, der ganget med sig selv giver tallet. Det er nemt at indse, at den præcise værdi af $\sqrt{4}$ må være lig med 2, fordi $2 \cdot 2 = 4$.
Den præcise værdi af $\sqrt{5}$ kan kun angives som $\sqrt{5}$. Men nogen gange har man brug for en tilnærmet værdi og det er muligt at bestemme en tilnærmet værdi af $\sqrt{5}$ med lige så mange decimalers nøjagtighed, som man ønsker.

Metode 1 (geometrisk metode)
I oldtidens Grækenland brugte man en geometrisk metode til at bestemme størrelsen af fx $\sqrt{5}$.
Figuren til højre viser, hvordan de kunne bestemme størrelsen af $\sqrt{5}$.



Metode 2 (gættemetode)
Hvis man skal bestemme en tilnærmet værdi for fx $\sqrt{8}$, kan man bruge en metode, hvor man først gætter på en værdi med en decimal og regner efter. Herefter gætter man på en ny værdi og regner efter igen og fortsætter således, indtil man har bestemt en tilnærmet værdi, med det antal decimaler, man ønsker.
- Diskuter i klassen princippet i denne metode.

Gættemetode til at bestemme værdien af kvadratroden af 8

Gæt nr.	Gæt	Gæt i anden
1	2,7	7,29
2	2,9	8,41
3	2,8	7,84
4	2,84	8,0656
5	2,82	7,9524
6	2,825	7,980625
7	2,829	8,003241

Metode 3 (gættemetode)
Gættemetoden der er beskrevet ovenfor er ret langsommelig. Derfor har man fundet på mere avancerede gættemetoder. Øverst næste side er vist en anden gættemetode, hvor man vil bestemme en tilnærmet værdi for kvadratroden af 12.
- Tal sammen i klassen om, hvad der sker når man går fra trin 1 til trin 2.
- Hvorfor må den tilnærmede værdi af kvadratrod af 12 ligge mellem det første gæt og k_1?

Opgave 1
- Forklar, hvorfor længden af det røde linjestykke i eksemplet ved metode 1 er $\sqrt{5}$.
- Brug et geometriværktøj til at bestemme størrelsen af $\sqrt{11}$.

Opgave 2
- Brug metode 2 til at bestemme en tilnærmet værdi for $\sqrt{11}$.
  Du kan med fordel bruge et regneark.
- Brug metode 3 og et CAS-værktøj til at bestemme en tilnærmet værdi for $\sqrt{11}$.

Bestemmelse af kvadratroden af 12

Trin 1: Gæt på en værdi for kvadratroden af 12.

tal = 12; gæt = 3,5; $gæt^2$

12,25

Trin 2: 3,5 er ikke rigtigt fordi 12,25 er større end 12. Jeg finder nu en ny værdi, som jeg også kontrollerer.

$k1 = \frac{tal}{gæt}$; $nyværdi = \frac{k1 + gæt}{2}$; $nyværdi^2$

12,0012755102

Trin 3: Nyværdi er tæt på en god værdi for $\sqrt{12}$, fordi $nyværdi^2$ er tæt på 12. Jeg prøver en gang til.

$k2 = \frac{tal}{nyværdi}$; $nyværdi1 = \frac{k2 + nyværdi}{2}$; $nyværdi1^2$

12,0000000339

Nyværdi1 er en god tilnærmet værdi for $\sqrt{12}$, fordi $nyværdi1^2$er meget tæt på 12. Jeg bruger derfor nyværdi1 som en god tilnærmelse til $\sqrt{12}$.

nyværdi1

3,46410162003

MatematiKan

Opgave 3

- Sammenlign metode 2 og metode 3 og beskriv, hvilken af de to metoder, som kræver færrest beregningstrin for at bestemme en tilnærmet værdi af $\sqrt{19}$ med 6 decimalers nøjagtighed.

Opgave 4

- Undersøg, hvilke andre metoder. Der findes til at bestemme kvadratroden af et givet tal. Du kan fx søge med denne streng: *How to find square root of a number*

- Hvad skulle du finde ud af?
- Hvilken metode vil du anbefale, hvis du ikke må bruge lommeregnerens kvadratrodstast?
- Kunne problemet løses på andre måder?
- Hvilke lignende problemer kunne de viste metoder bruges til at finde svar på?

Egne noter

....

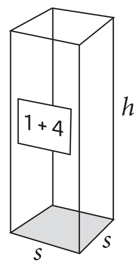
....

....

Rumfang

Saft kan købes i kartoner med en liter saft.
For at blive til blandet saft skal saften blandes med vand.
På kartonen står: 1 + 4.
Det betyder, at hver gang, man tager en del saft,
skal man hælde fire dele vand i.

- Beregn, hvor meget blandet saft der kan laves af en liter saft.



Kartonen har form som en kasse, som måler 7 cm × 7 cm indvendigt i bunden.
Hvis den kasseformede del af kartonen er 25 cm høj,
kan den indeholde noget mere end en liter:

$$7\,cm \cdot 7\,cm \cdot 25\,cm = 1225\,cm^3$$

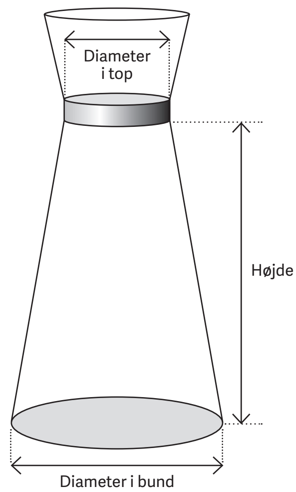
$$1\mathrm{L} = 1000\ \mathrm{cm}^3$$
$$V = s \cdot s \cdot h$$

- Undersøg med hjælp af et CAS-værktøj, hvor høj kartonen skal være for at kunne indeholde en liter.

Karaffel

Den nederste del af en karaffel har form som en keglestub
De indvendige mål på karaflen er:

- Højde: 15 cm
- Diameter i bunden: 10 cm
- Diameter i toppen: 5 cm

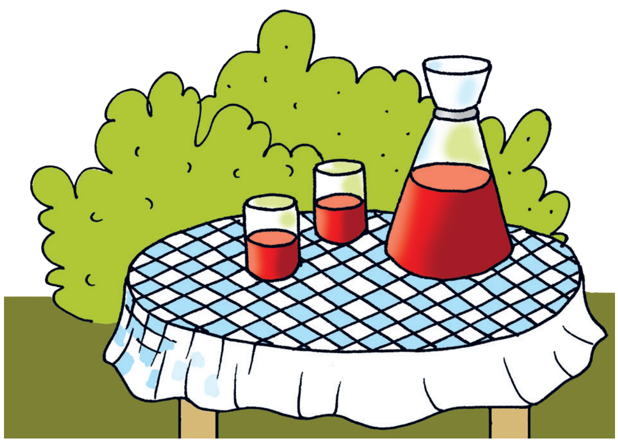


Det samlede rumfang af blandet saft kan beregnes til cirka 700 cm³:

$$\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 15\,cm \cdot ((5\,cm)^2 + (2{,}5\,cm)^2 + 5\,cm \cdot 2{,}5\,cm) \approx 700\,cm^3$$

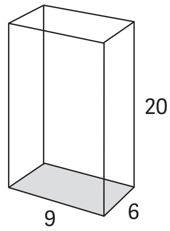
- Brug et CAS-værktøj til at udregne et mere præcist mål for rumfanget.

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot h \cdot (R^2 + r^2 + R \cdot r)$$



Tegning: Lærke Thordsen

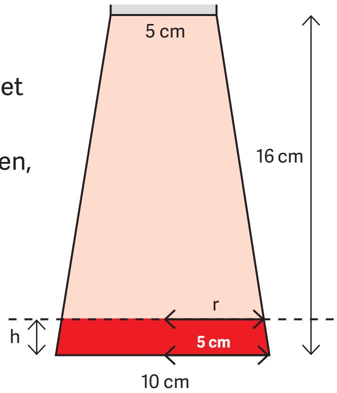
Opgave 1



En karton med saft har en grundflade på 6 cm × 9 cm og en højde på 20 cm.
Kartonen indeholder en liter saft.

- Undersøg, hvor langt saften er fra toppen af kartonen.

Opgave 2



På figuren ses tværsnittet af en karaffel.
Det røde felt er den ene del saft, der er hældt i, så det endelige blandingsforhold bliver 1 + 4.
Et regneudtryk for det rumfang, der er rødt på figuren, ser således ud:

$$\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot h \cdot ((5\ cm)^2 + r^2 + 5\ cm \cdot r) = \frac{1}{5} \cdot V$$

- Forklar, hvordan dette udtryk skal læses.

Opgave 3

Karaflen kan opdeles i to keglestubbe.
Den nederste med koncentreret saft og den øverste med vand.
Den del, der skal fyldes med vand, har højden (16 *cm* - *h*) og de to radier er 2,5 cm og *r*.

- Skriv et regneudtryk, der beskriver rumfanget af den del, der skal være vand.

Opgave 4

De to ligninger fra opgave 2 og 3 udgør tilsammen et ligningssystem med to ligninger og to ubekendte.

- Løs ligningssystemet i et CAS-værktøj.
- Forklar, hvad løsningerne af ligningssystemet viser.

- Overvej at løse opgave 4 uden benævnelser i dit CAS-værktøj.
- Sæt benævnelse på facit, før resultatet afleveres.
- Overvej, hvor mange betydende cifre resultatet skal angives med.

Egne noter

....

....

....

....

Bremselængde i trafikken

Standselængde = Reaktionslængde + Bremselængde

Reaktionslængde

En bil kommer kørende, og pludselig får føreren af bilen øje på en dame med barnevogn, der er på vej ud i fodgængerovergangen. Han beslutter sig for at bremse, men inden han får trådt på bremsepedalen, har bilen kørt et stykke vej. Reaktionslængden er afhængig af førerens opmærksomhed og bilens fart. Man regner med, at det tager 1 sek. at aktivere bremsepedalen.

- Beregn hvor langt en bil kører på 1 sekund, når den kører med en fart på 60 km/t.

Bremselængde

Bremselængden er afhængig af bilens fart, bremsernes og dækkenes tilstand samt vejoverfladen. Bremselængden bliver meget længere på en våd vej end på en tør vej. En enkel formel for bremselængde på tør vej er:

$B = 0{,}004 \cdot \text{farten}^2$

- Beregn bremselængden på en bil, der kører med en fart på 60 km/t.

Foto: Colourbox

Acceleration og deceleration

Når en bil øger sin fart, kaldes det *acceleration*.

Hvis bilen øger sin fart fra 16 m/s til 22 m/s i løbet af 2 sekunder, har den haft en acceleration på 3 m/s pr. s, der skrives som 3 m/s^2.

- Beregn accelerationen for en bil der øger sin fart fra 20 m/s til 28 m/s i løbet af 4 sekunder.

Når en bil formindsker sin fart ved at bremse kaldes det *deceleration*.

Hvis en bil mindsker sin fart fra 25 m/s til 21 m/s i løbet af 2 sekunder, har den haft en deceleration på 2 m/s pr. s, der skrives som – 2 m/s^2 og læses som minus 2 meter pr. sekund i anden.

- Beregn decelerationen for en bil, der mindsker farten fra 25 m/s til 16 m/s på 3 sekunder.

Fra km/t til m/s

I trafikken anvendes km/t som en betegnelse for fart, mens man i fysik ofte anvender benævnelsen meter pr. sekund: m/s. Når en bil kører 90 km/t svarer det til, at den kører 25 m/s.

- Omregn 60 km/t til m/s.

Opgave 1

En bil kører 72 km/t, da føreren ser en forhindring og vælger at bremse helt op.

- Vis den beregning, der omregner 72 km/t til 20 m/s, i et CAS-værktøj.

Opgave 2

Bilens bremseevne er 9 m/s^2.

Hvis bilen er 3 sekunder om at komme ned på 0 m/s, kan bremselængden beregnes med dette regneudtryk:

$$\frac{1}{2} \cdot 9\frac{m}{s^2} \cdot (3\,s)^2 = 40{,}5 \cdot m$$

- Indtast regneudtrykket før lighedstegnet i et CAS-værktøj, og vis at svaret er 40,5 m.

Opgave 3

Den tid, t, det tager bilen at bremse helt op fra den kører 20 m/s til 0 m/s kan beskrives med ligningen:

$$20\frac{m}{s} - 9\frac{m}{s^2} \cdot t = 0$$

- Løs ligningen i et CAS-værktøj, og beregn derefter bilens bremselængde med formlen:

  Bremselængde $= \frac{1}{2} \cdot bremseevne \cdot t^2$

Opgave 4

Den samlede standselængde består af reaktionslængde + bremselængde.

- Beregn den samlede standselængde for en bil, der kører med 90 km/t, når førerens reaktionstid er 1 sekund, og bremseevnen er 9 m/s^2.

Opgave 5

En tilnærmet og forenklet formel for beregning af bremselængde angives ofte på denne måde:

Bremselængde på tør vej: $B = 0{,}004 \cdot F^2$, hvor F er farten i km/t.

- Undersøg ved hjælp af et CAS-værktøj, om den forenklede formel kan anvendes i opgave 3.

- Hvordan har vejret og vejen indflydelse på bremselængden?
- Hvordan har føreren indflydelse på reaktionstiden?

Egne noter

....

....

....

....

Æske med låg

Hannah har fremstillet den æske med låg, der er vist på fotoet herunder, af et stykke rektangulært papir på 20 cm × 28 cm.

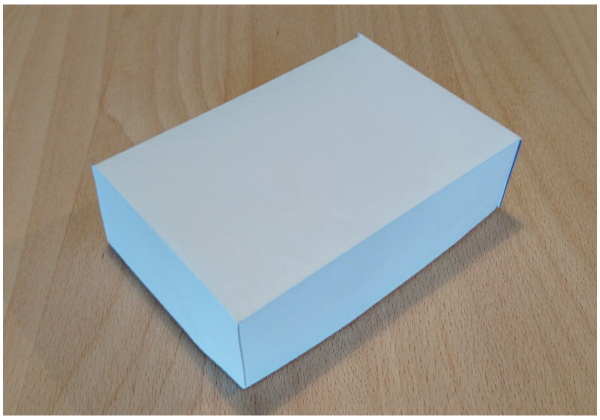
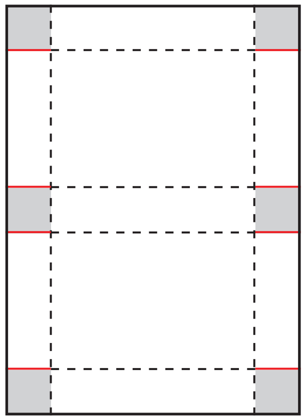


Foto: Niels Jacob Hansen



Skabelonen til æsken er vist på tegningen til højre.
Æskens højde er lig med længden af de røde linjestykker.
De stiplede linjer er foldelinjer og de røde linjer er klippelinjer.
De grå flader er limflader.

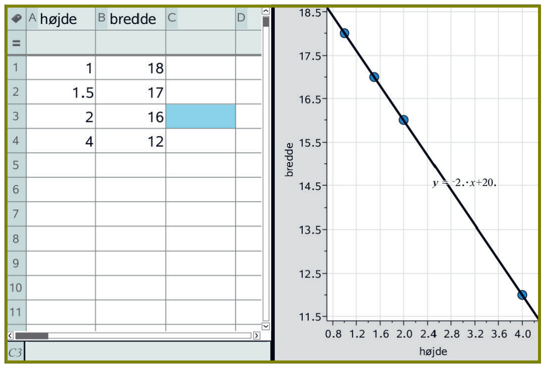
- I skal i fællesskab fremstille forskellige æsker med låg, hvor I bruger et rektangulært stykke papir på 20 cm × 28 cm.
- Mål højde, længde og bredde på æskerne og beregn rumfanget.
- Tegn en tabel, som vist herunder, og skriv resultaterne af jeres målinger og beregninger.

Æskens højde										
Æskens længde										
Æskens bredde										
Æskens rumfang										

Diskuter følgende spørgsmål i klassen
- Hvilken sammenhæng er der mellem æskens højde og længden af æsken?
- Hvordan kan man vise sammenhængen mellem æskens højde og længden af æsken?
- Hvordan ændrer æskens rumfang sig, når højden bliver større?
- Hvordan kan man bruge et CAS-værktøj til at undersøge og vise sammenhængen mellem æskens højde og æskens bredde?
- Hvordan kan man bruge et CAS-værktøj til at undersøge og vise sammenhængen mellem æskens højde og rumfanget af æsken?

Opgave 1

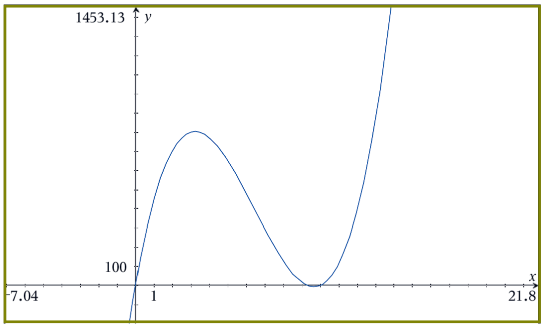
- Brug et CAS-værktøj til at vise sammenhængen mellem æskens højde og æskens bredde.
- Beskriv sammenhængen mellem æskens højde og æskens bredde.
- Få CAS-værktøjet til grafisk at vise sammenhængen mellem æskens højde og æskens bredde.



TI-Nspire CAS

Opgave 2

- Beskriv sammenhængen mellem æskens højde og æskens rumfang ved:
  - en tabel.
  - en graf.
  - en funktionsforskrift.
  - en sproglig beskrivelse.



TI-Nspire CAS

Opgave 3

- Brug dine beskrivelser fra opgave 2 til at svare på disse to spørgsmål:
  - Hvad er det størst mulige rumfang for en æske med låg, som er fremstillet af et stykke rektangulært papir på 20 cm × 28 cm?
  - Hvorfor er det ikke muligt at fremstille en æske med en højde på 12 cm?

- Hvordan kan man vise en sammenhæng mellem to variable?
- Hvilke kendetegn har:
  - en førstegradsfunktion?
  - en andengradsfunktion?
  - en tredjegradsfunktion?

Egne noter

....

....

....

....

....

Sandsynlighed og simuleringer

Foto: Bjørn Rasmussen

To elever arbejder med en opgave i deres matematikbog. De skal kaste en tændstikæske og notere, hvordan den lander.
De skal tildele de tre forskellige udfald point og spille et spil.
De taler om, at sandsynligheden for hvert udfald kan have noget at gøre med arealet af de tre sider på tændstikæsken.

- Kast en tændstikæske 100 gange og noter antallet af hvert udfald.
- Undersøg, om der er en sammenhæng mellem hyppigheden af udfaldene og arealerne af de tre flader.

En anden gruppe bruger forholdene mellem arealerne ved en simulering i et regneark og får denne fordeling:

Areal	Enden	Siden	Den store flade
Udfald	20 %	29 %	51%

- Beskriv om resultatet af jeres eksperiment med 100 kast passer med resultatet af simuleringen.

Klassen har fået til opgave at kaste to terninger og finde forskellen mellem øjentallene.
Bliver den ene terning en 6'er og den anden en 1'er, er forskellen 6 – 1 = 5

- Skriv en liste med de mulige forskelle.
- Undersøg, hvilke udfald der kommer oftest.

Ved hjælp af digitale værktøjer kan man simulere udfaldene.
Her er resultatet af fem kast i et CAS-værktøj, hvor forskellene er beregnet:

Abs[RandomInteger[{1, 6}, 5] – RandomInteger[{1, 6}, 5]]

{4, 0, 3, 0, 2}

MatematiKan

Herunder er et eksempel med fire kast i regneark:

	A	B	C	D	E
1	**Terning 1**	1	2	3	2
2	**Terning 2**	2	4	4	5
3	**Forskel**	**1**	**2**	**1**	**3**

	A	B
1	**Terning 1**	=SLUMPMELLEM(1;6)
2	**Terning 2**	=SLUMPMELLEM(1;6)
3	**Forskel**	**=ABS(B1-B2)**

Opgave 1

Foto: Bjørn Rasmussen

En klods har målene 2 cm × 4 cm × 7cm
Klodsens endeflade har arealet 2 cm · 4 cm = 8 cm^2

- Beregn arealet af klodsens andre flader.
- Brug et regneark til at simulere 1000 kast med klodsen.
- Sammenlign resultatet af simuleringen med et eksperiment, hvor du kaster 100 gange med en træklods med de angivne mål.

Opgave 2

Tre terninger kastes.
Det største antal øjne lægges sammen med det mindste, hvorefter det midterste antal øjne trækkes fra.
I det viste kast til højre vil resultatet blive 5 + 3 – 4 = 4.

- Undersøg
  - hvilke udfald, der er mulige.
  - hvilket udfald, der er det mindst mulige.
  - hvilket udfald, der er det mest sandsynlige.

- Opret et regneark og foretag 100 simuleringer.
  Angiv den statistiske sandsynlighed for hvert udfald.
- Undersøg, hvordan den kombinatoriske og den statistiske sandsynlighed passer sammen.
- Prøv at løse opgave 2 med dit CAS-værktøj.

	A t1	B t2	C t3	D udfald
=	=randint(1,6,10)	=randi	=randir	
1	3	1	3	1
2	5	3	4	4
3	2	3	4	3
4	1	2	1	2
5	4	1	6	3
6	1	6	4	3
7	2	6	3	5
8	4	4	6	6
9	6	4	2	4

D9 =max(a9:c9)+min(a9:c9)−median(a9:c9)

- Overvej, hvilke digitale værktøjer du helst vil bruge til simulering.
- Overvej forskelle på kombinatorisk og statistisk sandsynlighed.

Egne noter

....

....

....

....

....

....

Talrækker

Da Carl Friedrich Gauss som 7-årig begyndte at gå i skole, var han rigtig god til at regne. For at beskæftige ham satte hans lærer ham til at lægge alle tal fra 1-100 sammen. Læreren tænkte, at nu var Carl beskæftiget for et stykke tid, men der gik kun et kort øjeblik før han kom med det korrekte resultat.


Wikimedia

Carl Friedrich Gauss (1777-1855).

Diskuter i fællesskab i klassen

- Hvordan vil I løse den udfordring, som Carl fik?
- Hvad bliver resultatet?

Carl brugte en metode, der er vist med dette regneudtryk:

$$\frac{(1+100)\cdot 100}{2}$$

- Forklar Carls metode.
- Hvordan kan man bruge Carls metode til at finde summen af de 1000 første naturlige tal?

Ved at bruge et CAS-værktøj kan man hurtigt løse samme type udfordringer, som Carl blev udsat for. I rammen nedenfor til højre er vist, hvordan CAS-værktøjet MatematiKan kan bruges.

- Σ er det græske bogstav sigma. Undersøg betydningen af tegnet Σ i regneudtrykket.
- Undersøg, hvordan du indtaster en lignende formel i det CAS-værktøj, som du bruger.

CAS-værktøjet kan også bruges til at finde en formel, som kan bruges til en beregning af summen.

- Hvilket resultat får du, hvis du erstatter n over sigma-tegnet med 200?
- Forklar sammenhængen mellem Carls metode og formlen nederst i rammen.

Summen af de første 1000 naturlige tal

$$\sum_{n=1}^{1000} n$$

500 500

Summen af de første n naturlige tal

$$\sum_{i=1}^{n} i$$

$$\frac{1}{2}\,n\,(1+n)$$

MatematiKan

Opgave 1

Summen af de første 50 lige tal kan skrives på denne måde: $2 + 4 + 6 + \ldots + 98 + 100$

- Forklar, hvordan du vil finde summen af de første 50 lige tal ved beregning.
- Brug et CAS-værktøj til at bestemme summen.
- Brug et CAS-værktøj til at finde en formel for summen af de n første lige tal.
- Brug et CAS-værktøj til at finde summen af alle 3-cifrede tal.

Opgave 2

Nogle talrækker vokser eller aftager ikke ubegrænset, når der tilføjes flere led til talrækken. Talrækken herunder nærmer sig et bestemt tal.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} \ldots$$

- Forklar, hvorfor talrækken også kan skrives på denne måde: $2^0 + 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + 2^{-4} + 2^{-5} \ldots$
- Forklar, hvorfor udtrykket i rammen til højre kan bruges om talrækken.
- Beregn værdien af udtrykket for forskellige værdier af n.

$$\boxed{\sum_{i=0}^{n} 2^{-i}}$$

Opgave 3

Der er mange som interesserer sig for tallet π, som er forholdet mellem omkreds og diameter i cirklen.

Det er ikke muligt at finde et decimaltal eller en brøk, som viser den præcise værdi af π, men man kan beregne π med lige så mange decimalers nøjagtighed, som man ønsker, hvis man har tid nok og en computer, der kan klare opgaven.

Matematikeren Leibniz fandt i 1673 ud af, at man kunne beregne π med talrækken herunder:

$$\pi = \frac{4}{1} - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - \frac{4}{11} + \frac{4}{13} - \ldots$$

- Skriv de næste 3 led i talrækken herover, og beregn en tilnærmet værdi for π.

Leibniz' formel kan også skrives på denne måde:

$$\pi = (-1)^0 \cdot \frac{4}{2 \cdot 1 - 1} + (-1)^1 \cdot \frac{4}{2 \cdot 2 - 1} + (-1)^2 \cdot \frac{4}{2 \cdot 3 - 1} + \cdots + (-1)^n \cdot \frac{4}{2 \cdot (n+1) - 1}$$

- Brug et CAS-værktøj til at undersøge, hvor mange led, der skal være i udtrykket for at π er beregnet med 1 decimals nøjagtighed, 2 decimalers nøjagtighed, 3 decimalers nøjagtighed og 4 decimalers nøjagtighed.

Beregning af en tilnærmet værdi for π

$$\mathrm{pi} = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \cdot \frac{4}{2, \cdot (i+1) - 1}$$

MatematiKan

- Giv en forklaring på, at sigma ofte kaldes et summationstegn.
- Forklar betydningen af de forskellige tal og bogstaver i regneudtrykket i rammen.

$$\boxed{\sum_{n=1}^{10} 5 \cdot n}$$

- I hvilke situationer er det smart at bruge summation?

Egne noter

....

....

Matematik med it
Elevbog 2

Forfattere
Niels Jacob Hansen
Mikael Skånstrøm
Kirsten Søs Spahn

Redaktion
Jørgen Uhl Pedersen

Grafisk tilrettelæggelse
Bjørn Rasmussen · www.brgrafik.dk

Original CAS-grafik til temaerne
Forfatterne
Jørgen Uhl Pedersen

Tryk
Holm Print Management

Versionering til e-bog
Bjørn Rasmussen

ISBN: 978-87-92526-43-3

Forlaget Matematik
Nordby
8305 Samsø
mat.forlag@dkmat.dk
Tlf.: 8659 6022
www.dkmat.dk

Projektet *Matematik med it* støttes af
A. P. Møller og Hustru Chastine McKinney Møllers Fond til almene Formaal
Texas Instruments
Wolfram Research
Gladsaxe Kommune

Foto forside
Colourbox (plasticflasker og pige på cykel)
J. P. Valery, Unsplash (Tesla)
Bjørn Rasmussen (kystlinje med træ)