Kapitel 6

Abstract

Mange, især nylige, stor-skala undersøgelser af (lærings)udbyttet ved anvendelse af it i undervisningen, både generelt og i matematik, synes at tyde på, at gevinsten ikke står mål med indsatsen. Faktisk er nogle af konklusionerne, at it i bedste fald ikke gør nogen skade. Heroverfor står talrige beretninger, fra videnskabelige til kollegiale, om succesfulde forløb baseret på afgørende inddragelse af digitale teknikker – meget ofte af 'cutting-edge' lærere. En umiddelbar konklusion er, at det ikke handler om hvor meget, men om hvordan og af hvem. Danmark er kun overgået af Australien, når indsatsen gøres op i elevtid ifølge en nylig OECD-rapport. Der findes ikke mange undersøgelser af, hvilke beslutninger almindelige lærere tager om anvendelse, og hvad rationalet er for sådanne beslutninger. Så hvordan? og af hvem? er ret ubesvarede spørgsmål.

I dette kapitel vil jeg fremsætte nogle betragtninger om, hvad kernen i sådanne beslutninger er og give nogle eksempler på, hvordan de – enten udtalte, skjulte eller slet og ret ubevidste – manifester sig, ofte i form af skal-skal ikke. Sådanne eksempler kan dels klargøre ens eget dilemma, dels danne udgangspunkt for nye eller ændrede undervisningsdesign.

Forfatter

Niels Grønbæk

Professor, ph.d. Institut for Matematiske Fag, Københavns Universitet.

Centerleder for CMU*, Center for Computerbaseret Matematikundervisning, samme steds.

Formand for Danmarks Matematikundervisningskommission (DMUK).

En nylig publikation

Grønbæk, N., Winsløw C. (2016). Media and milieus for complex numbers: an experiment with Maple based text, *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, 2131-2137.

*) CMU er støttet af Industriens Fond, Institut for Matematiske Fag v. Københavns Universitet, Ministeriet for Børn, Undervisning og Ligestilling samt Maplesoft.

Kapitel 6

CAS eller Ka'-Selv

Andre discipliner inden for undervisning gennem it (videooptagelser og præsentationer, fjernundervisning, elektroniske tavler, søgemaskiner, …) er ikke fagspecifikke, selv om implementering af it nødvendigvis må optræde i fagspecifikke varianter. CAS adskiller sig fra generel it ved to forhold:

1. CAS er entydigt matematisk.
2. CAS transformerer matematikfaget. Matematik med CAS er ganske enkelt et andet fag end matematik uden CAS.

Derfor er fokus i dette kapitel på CAS. Den enkelte kan afgøre med sig selv, i hvilken grad principperne er anvendelige i mere generelle it-sammenhænge.

CAS – En frisættende kraft?

På mange måder minder den CAS-situation, som matematikuddannelsen står over for i dag, om forholdene, da lommeregneren holdt sit indtog. Den indledende fase var præget af stor begejstring for det didaktiske potentiale, næret af forestillingen om, at det rutineprægede og ofte trælse beregningsarbejde kunne bortskaffes ved at overlade det til det bekvemme værktøj. Undervisningen kunne således fokusere på det bærende og dybere begrebslige og på mere autentiske matematikanvendelser. Efterhånden som man måtte konstatere, at hensigterne ikke manifesterede sig i passende storskala, kølnedes begejstringen, og holdningerne fordelte sig i et felt mellem fortsat tiltro til lommeregnerens frisættende kraft og "ud med lommeregneren". Men hverken de, der omfavner, eller 'maskinstormerne' anviser farbare veje. Digitale teknikker, fra lommeregner til CAS, er moderne vilkår, ikke et til- eller fravalg. Når man i storskala-undersøgelser (se *Videre læsning* til slut i kapitlet), søger at besvare spørgsmålet, om CAS fremmer matematiklæring, opererer man med en (ofte indforstået) matematik-dagsorden, som CAS kan fremme eller modvirke.

Kerneaktiviteter – truede eller tabte?

Hvor ligger CAS på skalaen fra godt til skidt? Efter min mening fejladresserer man problematikken på to punkter, som overser punkt 2 ovenfor. Dels ved en tænd-sluk attitude, hvor man undersøger elevers præstationer i forhold til uspecificeret CAS-brug, og hvor de samme opgaver skal løses med og uden CAS. Dels ved en dualistisk opfattelse, at CAS blot er en side af matematik, som er blevet mulig gennem den teknologiske udvikling.

Hovedårsagen til den kølnede begejstring for lommeregnerens betydning er, at væsentlige matematiske kerneaktiviteter vedrørende talforståelse, decimalsystemets opbygning, aritmetiske operationer… endte med at være truede og måske ligefrem tabte. Der er selvfølgelig mange forhold, der har influeret på dette – ikke mindst samfundets forventninger til skolens modernitet og effektivitet. Jeg vil her hæfte mig ved to forhold, som er faginterne. De angår anvendelse at digitale teknikker i al almindelighed:

1. Værktøjerne fungerer ikke læringsmæssigt “af sig selv”. I udgangspunktet er det blot en samling muligheder, som skal gøres hensigtsmæssige i hånden på brugeren. Dette er en langt mere kompliceret proces, end den indledende begejstrings syn på frigørelse.
2. Opdelingen, at overlade nogle ‘trivielle’ faglige aspekter til værktøjet for at koncentrere sig om andre ‘mere værdige’, er i bedste fald naiv, men faktisk potentielt ødelæggende for tilegnelsen af faget – og dermed på sigt for faget selv!

De to forhold er tæt forbundne. Det første behandles indgående i teorien for instrumentskabelse (instrumental genesis), som er inspireret af kognitiv ergonomi. Begrebet *instrumentering* refererer til denne teori. Her vil jeg ikke komme nærmere ind på det end blot fastslå ovenstående.

Hjemmebane eller udebane?

Mit ærinde er det andet punkt: Hvad skal læreren holde på den matematiske hjemmebane, og hvad kan overlades til værktøjerne? For at beskrive de fundamentale mekanismer i lærerens overvejelser, vil jeg betjene mig af en metafor hentet fra virksomhedsøkonomi. Hvis læring opfattes som undervisningens produkt, kan læreren opfattes som virksomhedsleder og eleverne som virksomhedens ansatte, der realiserer virksomhedens *strategiske planer* i form af læringsudbytte. Udbyttet manifesteres ved, at eleverne udfører forskellige matematikaktiviteter (løser, tegner, beregner, estimerer, forudsiger, tilnærmer …), som er målrettede i forhold til typer af opgaver, som indbefatter, men ikke må forveksles med, det mere snævre ‘typeopgaver’, der løses ved hjælp af skabelonagtige tilgange. Til rådighed har eleverne forskellige teknikker – typisk i spændfeltet fra ‘blyant og papir’ til digitale teknikker, nogle beskrivelser og viden om, hvad teknikkerne gør godt for, hvad deres begrænsninger er osv. Endvidere er der en teori om, hvorfor og i hvilken udstrækning teknikkerne virker, og hvordan alt dette er relateret til øvrig matematik. En sådan teori kan meget vel være elevens

egen teori og er måske helt misvisende i forhold til 'korrekt teori'. Men der er altid en teoridel. Afhængigt af læringsmålene kan eleverne inddrages mere eller mindre i den 'korrekte' teoretiske diskurs, som er en del af virksomhedsledelse, altså lærerens styring af undervisningen. Disse forhold er underlagt en række vilkår, så som lærerens/læreplanens umiddelbare og langsigtede intentioner, traditioner på skolen, samarbejde med andre fag, …

Eksempel

Opgaver inden for en matematikaktivitet om "aritmetik og decimalbrøker".

Scenario 1	**Scenario 2**
• *Teknik*, blyant og papir: Opstilling af "regnestykket", udførelse af algoritme under benyttelse af hovedregning med små tal (den lille tabel, …) • Kræver *regler* for decimalrepræsentation af tal, placering af komma, fortegnsregler, … • *Teori* for rationale tal, uligheder og de fire regningsarter.	• *Teknik*, Excel: Indtastning i celler på Excel-ark, kald af fx funktionaliteten "=celle1*celle2" • Kræver *regler* for korrekt kald af procedurer, formatering af celler, … • *Teori* for aritmetik af decimaltal med op til 15 cifre, repræsentation og afrundingsregler, antal korrekte cifre, …

Det er meningsløst at tale om, hvilket af de to scenarier der er bedst. Men det er klart, at de er vidt forskellige og tjener hvert sit formål. Scenario 1 er håbløst for mangecifrede tal, mens Scenario 2, hvor multiplikation og division blot er Excel-rutiner af samme kompleksitet, ikke kaster meget lys over identiteten $7 \cdot \frac{1}{7} = 1$.

Alle komponenterne, typer af opgaver, … teori, er altid til stede i en samlet matematikaktivitet, nogle måske stiltiende. Den konkrete afvejning er essensen af undervisningstilrettelæggelsens faglige dimension.

Hvad har dette at gøre med virksomhedsøkonomi?

Udbyttet i en produktionsvirksomhed afhænger af *den strategiske planlægning*, som bygger på:
1. Klarhed om produktionsmål
2. Fastlæggelse af de aktiviteter, som kræves hertil
3. Allokering af de resurser, som fordres for aktiviteterne.

Helt afgørende for virksomhedens succes er spørgsmålet om allokering: Skal vi købe det, eller skal vi gøre det selv (buy-or-make)? Dette er gammel viden. I moderne terminologi taler man om *outsourcing* og *insourcing*. I de senere årtier er outsourcings andel af den samlede resurseallokering vokset voldsomt, først og fremmest på grund af de muligheder, som udviklingen af it har skabt. Men outsourcing er risikabel. I 2003 skønnedes, at ca. halvdelen af alle outsourcing-aftaler mislykkedes på grund af ufuldkomne analyser vedrørende især punkt 2 og 3 ovenfor.

Kerneaktiviteter – insourcing og outsourcing

Der synes at være enighed om, at det afgørende er at få bestemt, hvilke aktiviteter der er virksomhedens *kerneaktiviteter*, og hvilke der er *ikke-kerneaktiviteter*. Groft sagt er kerneaktiviteter, det virksomheden gør bedre end andre. Kerneaktiviteter skal insources, det vil sige, at resurserne skal tildeles inden for virksomheden. Ikke-kerneaktiviteter kan, men behøver ikke, outsources, dvs. resurserne placeres eksternt i forhold til virksomheden (altså købes). Den afgørende egenskab ved insourcing er, at virksomheden bevarer *kontrol med aktiviteten*. Tilsvarende, indebærer outsourcing afkald på kontrol.

Læreren som virksomhedsleder – bestemmelse af matematiske kerneaktiviteter

Parallellen til læreren som virksomhedsleder af elevernes læringsprocesser er åbenbar. Vi skal her beskæftige os med, hvad det betyder at outsource og dermed afgive kontrol til eksterne aktører så som MatematiKan, Excel, Maple, Geogebra, …, hvis fremkomst er resultat af it-udviklingen.

Lærerens strategiske planlægning angår tilrettelæggelse af undervisningen og sigter mod øgning af læringsudbyttet. Som med virksomhedsøkonomi er det afgørende at få fastlagt, hvad de matematiske kerneaktiviteter er. I overensstemmelse med erkendelsen fra virksomhedsøkonomi skal afgørelsen træffes ud fra overvejelser om:

1. Den matematiske aktivitet skal være bedre end andre tilgange.
2. Der er kontrol over aktiviteten, såvel udførelsen som pålideligheden, med det matematiske beredskab (viden, metoder, …), som undervisningen stiller til rådighed.

I almindelighed er der ikke tale om endegyldige afgørelser. De vil afhænge af de konkrete omstændigheder. Oftest vil der dog være konsensus om, hvad der er matematiske kerneaktiviteter.

Pointen er vigtigheden af *at gøre disse overvejelser*, før man beslutter sig for, om der skal insources eller outsources. Det modsatte – og ofte forekommende – er, at man bliver fascineret af en eller anden feature eller app og dernæst leder efter en aktivitet, som den kan bruges til. Det kan selvfølgelig godt give gode idéer, men hvis det er det styrende princip for beslutninger om outsourcing, er der kun tale om ren opportunisme.

Eksempel

I relation til eksemplet ovenfor er multiplikation af tal med få cifre en matematisk kerneaktivitet. Vi har algoritmer for udførelsen, der giver os fuld kontrol og som kan udføres på rimelig tid. Vi har samtidig en teori, som begrunder algoritmerne og derved gør os i stand til at kontrollere resultatet. Multiplikation af mange-cifrede tal er ikke en kerneaktivitet. Det kan gøres bedre og hurtigere med eksterne resurser, og størrelsesordenen af aktiviteten reducerer muligheden for kontrol. Bemærk, hvordan outsourcing betyder tab af kontrol.

Refleksionsopgave 1

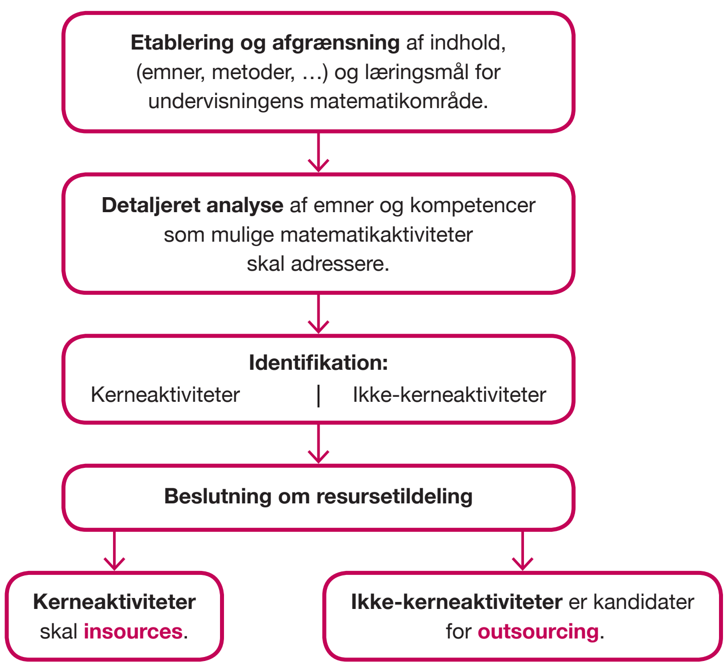
- ★ Der er flere detaljer i dette eksempel end antydet. Hvad er for fx “få cifre”?
- ★ Er der tilfælde, hvor få-cifret multiplikation ikke betragtes som en kerneaktivitet?
- ★ Fortsæt overvejelserne.

Refleksionsopgave 2

★ Betragt nogle af eksemplerne i Karsten Enggaards kapitel og analyser dem med hensyn til kerneaktivitet/ikke-kerneaktivitet.
Det matematiske beredskab, som er forventeligt hos eleverne (aktørerne) på det pågældende klassetrin, skal inddrages i analysen.

Undervisningsplanlægningens strategi

Matematik har særdeles væsentlig betydning for samfundet. Dette beror ikke mindst på, at matematiske idéer forbliver de samme i vidt forskellige sammenhænge, og at man kan stole på resultatet af (korrekt udførte) matematiske handlinger. (Om man kan stole på matematikbeskrivelser og fortolkningerne i forhold til 'virkeligheden', er et helt andet spørgsmål.) For at denne *robusthed* og pålidelighed kan bevares, er valget mellem, hvad der skal insources, og hvad der skal outsources, helt afgørende i 'produktionen af matematiklæring'. Hvad skal nås med matematik-interne resurser, og hvad kan overlades til matematik-eksterne resurser? Erfaringerne fra virksomhedsøkonomi tilsiger, at kerneaktiviteter skal insources og ikke-kerneaktiviteter er kandidater for outsourcing. Undervisningsplanlægning med dette strategiske sigte kan opsummeres i følgende diagram:



Vedrørende eksemplet fra før: Multiplikation af tal med få cifre er en kerneaktivitet og må **ikke** outsources. Multiplikation af mange-cifrede tal kan overlades til fx Maple.

Refleksionsopgave 3

Det amerikanske flyselskab TWA havde i starten af 90'erne et billetbookingsystem, som var konkurrenternes klart overlegen, altså en kerneaktivitet. Imidlertid valgte ledelsen at outsource billetbooking. TWA genvandt aldrig dets position på markedet og lukkede i 2002.

★ Er der tilsvarende eksempler i matematikuddannelserne?

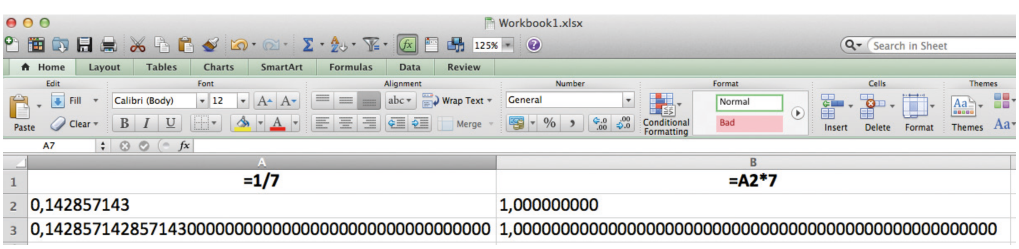
CAS eller Ka'-Selv

I det efterfølgende vil jeg illustrere, hvordan in- og outsourcing af matematikaktiviteter indgår i længere forløb, som man kan forestille sig foregår henover overgang fra grundskole til gymnasium. Noget af det stammer fra autentisk undervisning (Dogme-Maple og decimaludvikling af kvadratrod 2).

Eksempel 1. Regner Excel rigtigt?

I et konkret forløb om instrumentering af Excel arbejder eleverne med valg af antal cifre i cellerne. Læreren har vist, hvordan man i Excels kontrolpanel kan indstille antallet af decimaler, og har bedt eleverne undersøge forskellige stambrøker ved hjælp af celler, der viser $\frac{1}{n}$ og $\frac{1}{n} \cdot n$. Opgaven lyder: "Afgør om det er korrekt, hvad Excel viser".

Eleverne kan være nået frem til nedenstående:



Opgaven om Excels korrekthed er en matematisk kerneaktivitet. Det er ikke korrekt, hvad Excel viser, for multiplikationen i kolonne B vil føre til en decimalbrøk, der ender på decimalen 1. Outsourcing til Excels cifferhåndtering giver ikke nogen indsigt, kun tilføjelse af 0'er.

Vi kunne også vælge at outsource undersøgelsen af Excels pålidelighed til Maple.

Dette kunne fx give nedenstående resultat:

```
> Digits:=10:
  .142857142857143;
  0.142857142857143                  (1)
> %*7;
       1.000000000                   (2)
>
```

```
> Digits:=20:
  .142857142857143;
  0.142857142857143                  (3)
> %*7;
  1.000000000000001                  (4)
>
```

Med sin større regnekraft kan Maple vise, at sidste ciffer er 1, men outsourcing betyder stadigvæk, at vi har afgivet kontrol. Hvis ikke undersøgelsen insources, skal vi jo blot stole på, at Maple har regnet rigtigt.

Refleksionsopgave 4

Excel regner forkert. Det kan ikke være rigtigt, at decimaludviklingen for $\frac{1}{7}$ ender på lutter 0'er. Dette kan indses ved at betragte sidste ciffer i en simpel multiplikation med 7 af decimalfremstillingen endende på lutter 0'er. Ikke desto mindre viser Excel øjensynligt at $\frac{1}{7} \cdot 7 = 1$.

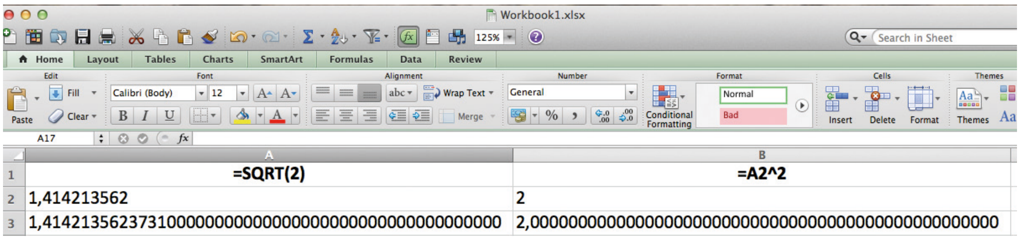
★ Hvad er på færde?
★ Er Excels upålidelighed alligevel i orden?
★ Overvej en strategisk planlægning med sourcingbeslutninger vedrørende disse spørgsmål.

Eksempel 2. Outsourcing af kerneaktiviteter

1. Læreren, som er i gang med nogle beregninger, der involverer $\sqrt{2}$, spørger for lige at tjekke, at eleverne ikke er faldet i søvn: "Og kvadratet på kvadratrod 2 er …?"
   Eleven: "Vil du virkelig have, at vi skal regne det ud!?"
   En nærmere spørgen ind til dette afslører, at eleven tror, at læreren har bedt om håndudregningen: $1.414213562 \cdot 1.414213562$
2. Outsourcet: $V(r) = 4{,}188790204 \cdot r^3$
   Insourcet: $V(r) = \frac{4\pi}{3} \cdot r^3$

Eksempel 3. Et længere forløb om decimaludvikling i udskolingen eller 1. g

På lommeregneren angives $\sqrt{2}$ til at være 1,414213562. Eleverne får opgaven: "Hvad er næste ciffer?" Og mere almindeligt: "Hvad er de næste cifre?"
I Excel regnes med $\sqrt{2}$ som forventeligt:

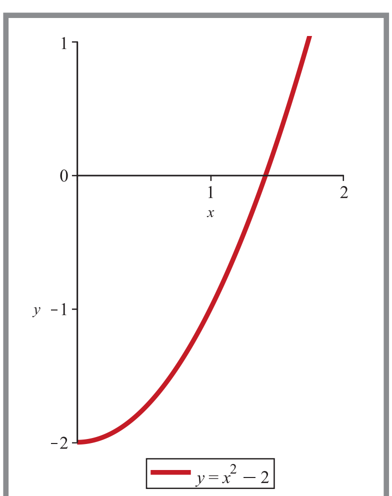


Excel kan svare med lidt flere cifre end lommeregneren, men giver hurtigt op.
I Maple ser det mere overbevisende ud, fx:

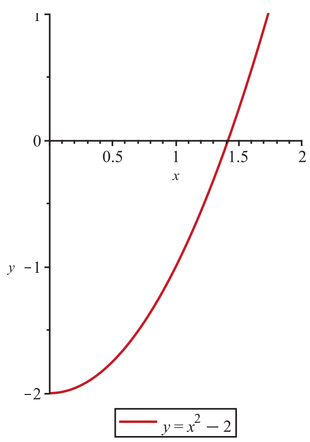
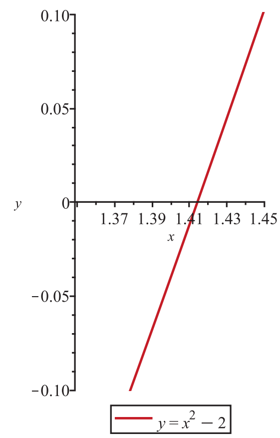
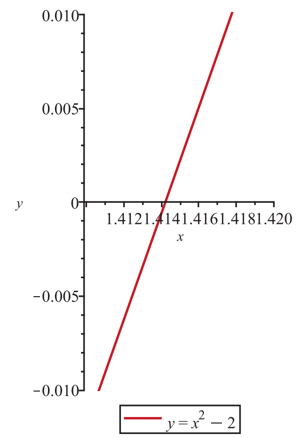
```
> evalf[100](sqrt(2));
1.414213562373095048801688724209698078569671875376948073176679737990732478462l\
    07038850387534327641573
```

Faktisk kan Maple regne med op til 38654705646 cifre. Så outsourcing kan give imponerende svar. Men vi har fuldstændigt givet afkald på kontrol, og der er ikke megen indsigt vundet om decimaludvikling – måske ud over, at de kan være meget lange.

Vi kan også studere det grafisk fx, ved hjælp af Maple. Vi finder $\sqrt{2}$ som skæringen mellem den positive x-akse og parablen givet som $y = x^2 - 2$.



For at få de første cifre i decimaludviklingen zoomer vi ind. Vi får bedre og bedre bud på skæringspunktet, og Maple giver os en visuel idé om, hvad problemet drejer sig om. Vi skal bestemme decimaludviklingen af koordinaterne til et skæringspunkt ved at stille skarpere og skarpere. Herudover giver det ingen dybere indsigt. Maple er god til at stille skarpt, men det hele ligger hos Maple.

$1.4 < \sqrt{2} < 1.5$	$1.41 < \sqrt{2} < 1.42$	$1.414 < \sqrt{2} < 1.415$
		

For at bevare kontrol og derved opnå indsigt vælger jeg et design, hvor langt mindre er outsourcet til Maple. Eleverne får at vide, at de kun må bruge 'Dogme-Maple'.

Dogme-Maple

A. Maple må benyttes
- **a.** til de 4 regningsarter, dvs. Maple-output er resultatet af et 'regnestykke'
- **b.** som facitliste (det kan være urealistisk at regne efter i hånden, men du kan i princippet, hvis du får tid nok).

B. Du må regne med så mange cifre, som du finder hensigtsmæssigt.

C. For at indtastninger ikke skal tage for megen tid, er det er tilladt at benytte `for` … `from` … `to` … `do` … `end do`-konstruktioner eller lignende, så længe `do` … `end do` respekterer **A**.
Konstruktionen forklares nærmere i det følgende.

Eleverne fik nu problemet:
Hvor mange cifre kan du beregne i decimaludviklingen af $\sqrt{2}$ i Dogme-Maple?

I det efterfølgende har jeg ikke inddraget pædagogiske overvejelser, såsom hvor åbent opgaven skal stilles, hvor synlig læringen skal være, osv. Sådanne er naturligvis vigtige, men uden for sigtet med dette kapitel. Med passende stilladsering kan man nå frem til nedenstående 3 metoder, men selvfølgelig også andre.

Metode 1. Prøv dig frem

Du har fundet et antal cifre i decimaludviklingen. Der er 10 muligheder for det næste ciffer. Benyt Dogme-Maple til at afgøre hvilket er det rigtige.

Et par trin i dette er anført nedenfor. Lad os sige vi allerede har fundet de 2 første cifre til at være 1.4. Det tredje ciffer findes ved at prøve med alle mulighederne 1.40 – 1.41 – 1.42 – … – 1.49.

Vi udregner alle kvadraterne $1.40^2 - 1.41^2 - 1.42^2 - \ldots - 1.49^2$ og finder det, som kommer tættest på 2. Dette kan gøres ved 10 indtastninger, men vi kan også sætte Maple til at foretage de 10 beregninger på én gang ved hjælp af et kald af konstruktionen `for` … `from` … `to` … `do` … `end do`. Den første anvendelse udskriver for hvert af cifrene $i = 0, \ldots, 9$ et talpar $[i, (1.4 + \frac{i}{100})^2]$, altså $[0,1.40^2]$ – $[1,1.41^2]$ – $[2,1.42^2]$ – … – $[9,1.49^2]$. Jeg har blot taget førstekoordinaten i med som output, for at man bekvemt kan spotte den næste decimal fremfor at tælle sig frem i output.

```
> for i from 0 to 9 do [i,(1.4+
  i/100)^2] end do;
                [0, 1.96]
                [1, 1.988100000]
                [2, 2.016400000]
                [3, 2.044900000]
                [4, 2.073600000]
                [5, 2.102500000]
                [6, 2.131600000]
                [7, 2.160900000]
                [8, 2.190400000]
                [9, 2.220100000]          (1)
```

```
> for i from 0 to 9 do [i,
  (1.41+i/1000)^2] end do;
                [0, 1.9881]
                [1, 1.990921000]
                [2, 1.993744000]
                [3, 1.996569000]
                [4, 1.999396000]
                [5, 2.002225000]
                [6, 2.005056000]
                [7, 2.007889000]
                [8, 2.010724000]
                [9, 2.013561000]          (2)
```

Af første udregning i Dogme-Maple ses, at $1{,}41^2 < 2 < 1{,}42^2$, så tredje ciffer er 1. Tilsvarende ses i anden udregning, at $1{,}414^2 < 2 < 1{,}415^2$, så fjerde ciffer er 4. Metoden kan fortsættes til ønsket antal cifre. Eleverne behøver ikke selv at have fundet frem til konstruktionen `for` … `from` … `to` … `do` … `end do`, men skal forstå, hvordan den virker, så de kan rette den til for at finde flere decimaler.

Metode 2. Bi-sektion

Metode 1 kan opsummeres: at have bestemt en decimal, fx den tredje, betyder at have bestemt et interval af længde $\frac{1}{1000}$, inden for hvilket tallet $\sqrt{2}$ ligger. Den næste decimal bestemmes ved at dele dette interval op i tiendedele, altså hvert interval af længde $\frac{1}{10\,000}$, og bestemme inden for hvilket af de 10 delintervaller $\sqrt{2}$ ligger. Dette gøres ved at kvadrere alle intervalendepunkterne og benytte, at $x \mapsto x^2$ er voksende for $x > 0$.

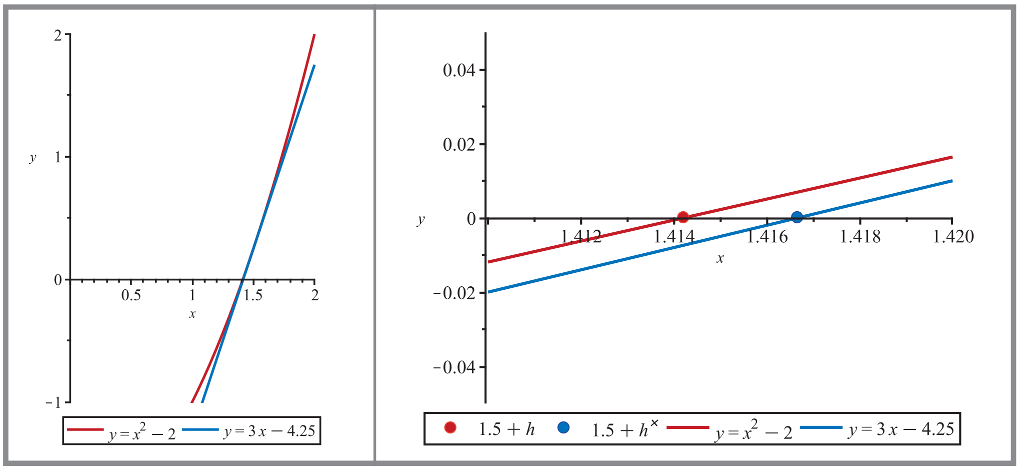
I bi-sektionsmetoden halverer vi i stedet intervallet hver gang. Dette kan også uproblematisk foretages i Dogme-Maple.

Metode 3. Lineær approksimation

Lineær approksimation betyder, at vi erstatter det søgte skæringspunkt med x-aksen for parablen $y = x^2 - 2$, med skæringspunktet for en passende ret linje. Denne skal vælges, sådan at den giver en god tilnærmelse (approksimation). Idéen er, at vi ud fra et gæt, som i første omgang ikke behøver at være særlig godt, finder en ret linje, som kan benyttes til at forbedre vores gæt. Metoden går efter sigende helt tilbage til babylonisk matematik. Isaac Newton satte metoden ind i differentialregningens rammer (1669). Andre har også bidraget til metodens udvikling. Den mere generelle metode, som bygger på differentialregning, kaldes Newtons metode eller Newton-Raphson metoden, se fx https://en.wikipedia.org/wiki/Newton%27s_method

For at være konkret, lad os sige, at vores første bud på en decimaludvikling er:
$\sqrt{2} \approx 1.5$.
Det vil altså sige, at: $\sqrt{2} = 1.5 + h$, hvor h er det, vi har gættet ved siden af.
Vi kvadrerer og får: $2 = 2.25 + 3 \cdot h + h^2$

Vi er på jagt efter en god tilnærmelse. Når h er lille af størrelse, er h^2 endnu mindre, så vi ser bort fra h^2. Vi betragter i stedet ligningen $2 = 2.25 + 3 \cdot h^\times$, som har løsningen $h^\times = \frac{2.25-2}{3}$. (Jeg har indført en ny betegnelse, $h^\times$, for at markere at 'se bort fra' jo betyder en ændring.) Vi kan nu bestemme næste approksimation i Dogme-Maple:
$\sqrt{2} \approx 1.5 + \frac{2.25-2}{3} = 1.4166\ldots$ Grafisk kan det illustreres som vist øverst næste side:



Første plot viser, hvordan den rette linje approksimerer parablen. Linjens ligning $y = 3 \cdot x - 4.25$ fås ved variabelskiftet $x = 1.5 + h^{\times}$ i ligningen $y = -2 + 2.25 + 3 \cdot h^{\times}$.

Generelt går vi frem på følgende måde. Lad os sige vi har et gæt på decimaludviklingen. Vi betegner dette gæt med a, således at:

$$\sqrt{2} = a + h,$$

hvor h er det, som vi har gættet ved siden af, altså med ukendt decimaludvikling. Men vi ved noget om h, som vi nu vil udnytte. Hvis fx $a = 1.414$, vores hidtil bedste bud, så er $0 < h < 10^{-3}$. Vi er på jagt efter den 4. decimal. Vi starter med at kvadrere og får:

$$2 = a^2 + 2a \cdot h + h^2.$$

Da $0 < h^2 < 10^{-6}$, har h^2 ingen betydning for 4. decimal. (Det er ikke helt så oplagt, som det lyder, men vi godtager det her.) Vi ser bort fra h^2 og kigger derfor i stedet på ligningen: $2 = a^2 + 2a \cdot h^{\times}$. Her kan vi nemt bestemme $h^{\times}$:

$$h^{\times} = \frac{1}{a} - \frac{a}{2}.$$

Vores nye gæt er: $a + h^{\times}$, altså, hvis vi indsætter det fundne udtryk for $h^{\times}$:

$a + \frac{1}{a} - \frac{a}{2} = \frac{a}{2} + \frac{1}{a}.$

Vi udregner i Dogme-Maple og bruger Dogme-Maple som facitliste:

```
> a:=1.414;a/2+1/a;
                                a := 1.414
                                1.414213578        (1)
> evalf(sqrt(2));
                                1.414213562        (2)
```

Det ses, at metoden er ret effektiv. Man får korrekt decimaludvikling med 8 cifre. Den er faktisk overordentlig effektiv. Man kan vise at den ca. fordobler antallet af korrekte cifre ved hver gentagelse. Ved at gentage proceduren 4 gange får man således korrekt decimaludvikling med 65 cifre:

```
> a[0]:=1.414;
```

$$a_0 := 1.414$$

```
> Digits:=65;
  for i from 1 to 4
  do
  a[i]:=a[i-1]/2+1/a[i-1]
  end do;sqrt(2)=evalf(sqrt(2));
```

$$Digits := 65$$

$$a_1 := 1.4142135785007072135785007072135785007072135785007072135785007072$$

$$a_2 := 1.4142135623730951407608800696939184068562386866668634997830924238$$

$$a_3 := 1.4142135623730950488016887242097010683913996224638523146757513930$$

$$a_4 := 1.4142135623730950488016887242096980785696718753769480731766797380$$

$$\sqrt{2} = 1.4142135623730950488016887242096980785696718753769480731766797380$$

Eleverne blev nu spurgt, hvilken metode der er bedst, hvor gode metoderne hver især er, om de kan bruges til at finde decimaludvikling af andre kvadratrødder? Om metoderne kan bruges til kubikrødder? Hvad med π? Det kan følges op på mange måder, for at udvide læringsmål, for at konsolidere læring, …, som alle involverer meget varierede out- og insourcing strategier. Her følger to elevresponser på de første spørgsmål:

Elev 1:

"Det kommer an på hvor nøjagtigt et resultat, man ønsker. Og hvor mange gange man vil gentage regnestykket for at få et mere specifikt tal. Hvis man f.eks. vil regne $\sqrt{2}$, for at tage et eksempel i det jeg har regnet, kan man se, at metode 2 og 3 er de bedste, men hvis man vil forstå beregningen bedre, er metode 1 den bedste."

Eleven har korrekt fat i, at svaret kræver en slags cost-benefit afgørelse og, at metode 1 er kernen i problemet. I et efterfølgende forsøg på at beregne $\sqrt{7}$ efter Metode 1 laver eleven følgende Maple-beregning:

```
> for i from 0 to 9 do x[i]:=(sqrt(7.0)+i/100)^2 end do;
```

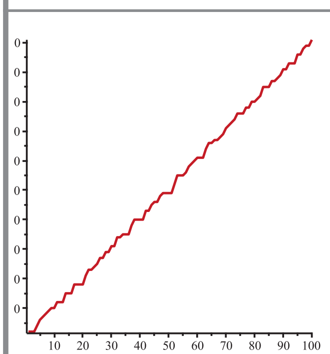
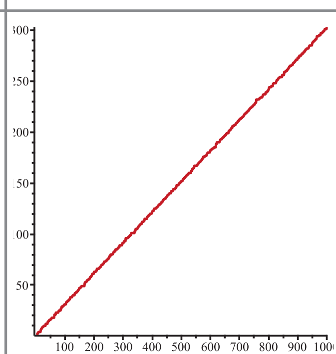
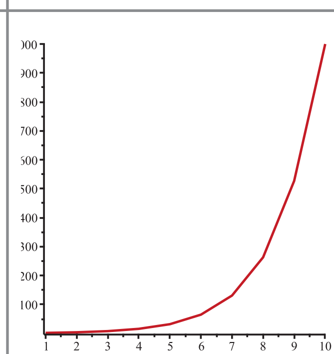
$$x_0 := 7.000000000$$
$$x_1 := 7.053015026$$
$$x_2 := 7.106230052$$
$$x_3 := 7.159645078$$
$$x_4 := 7.213260105$$

Eleven konkluderer intet ud fra denne beregning.

Det første svar indikerer at metoderne er ved at give mening for eleven, men den anden besvarelse, at der er lang vej tilbage. Eleven har brug for at genoverveje, hvad problemet, Metoden 1 og Dogme-Maple går ud på (sqrt er ikke tilladt i Dogme-Maple, og kortslutter hele idéen med decimaludvikling). En mulig forklaring på, at eleven overser dette, kunne være, at eleven er fastholdt i effekterne af overdreven outsourcing til et digitalt værktøj, og derfor stadig ikke skelner mellem $\sqrt{7}$ og dets 10-cifrede decimaludvikling, men blot forsøger at efterligne mønsteret i de tidligere beregninger. Hvad end forklaringen er - det må læreren jo forsøge at afdække - er der behov for yderligere forløb med omhyggeligt overvejet strategi for in-og outsourcing.

Elev 2

Forløbet er også blevet afholdt i 3. g. En elev, som var skrap (selvlært) til løkker i Maple, lavede følgende grafer (input til graferne **er** produceret i Dogme-Maple, men selvfølgelig ikke graferne selv, da **plot** ikke er tilladt i denne version af Dogme-Maple). Første-akserne viser antallet af gange, hvor metodernes grundlæggende procedure er gentaget, anden-akserne, hvor mange korrekte cifre, der opnås.

Metode 1	Metode 2	Metode 3
		

Første graf er nem at forstå (hvert gennemløb af proceduren giver jo en ny decimal), men hvorfor giver Metode 2 også en ret linje, hvad er hældningen og hvorfor er den det? Og kan vi beskrive grafen for metode 3 bedre end at den bliver stejlere og stejlere?

At fortolke graferne kræver insourcing til ikke-digitale teknikker, hvor blandt andet den erhvervede indsigt om decimaludvikling må indgå i en ny og mere avanceret sammenhæng.

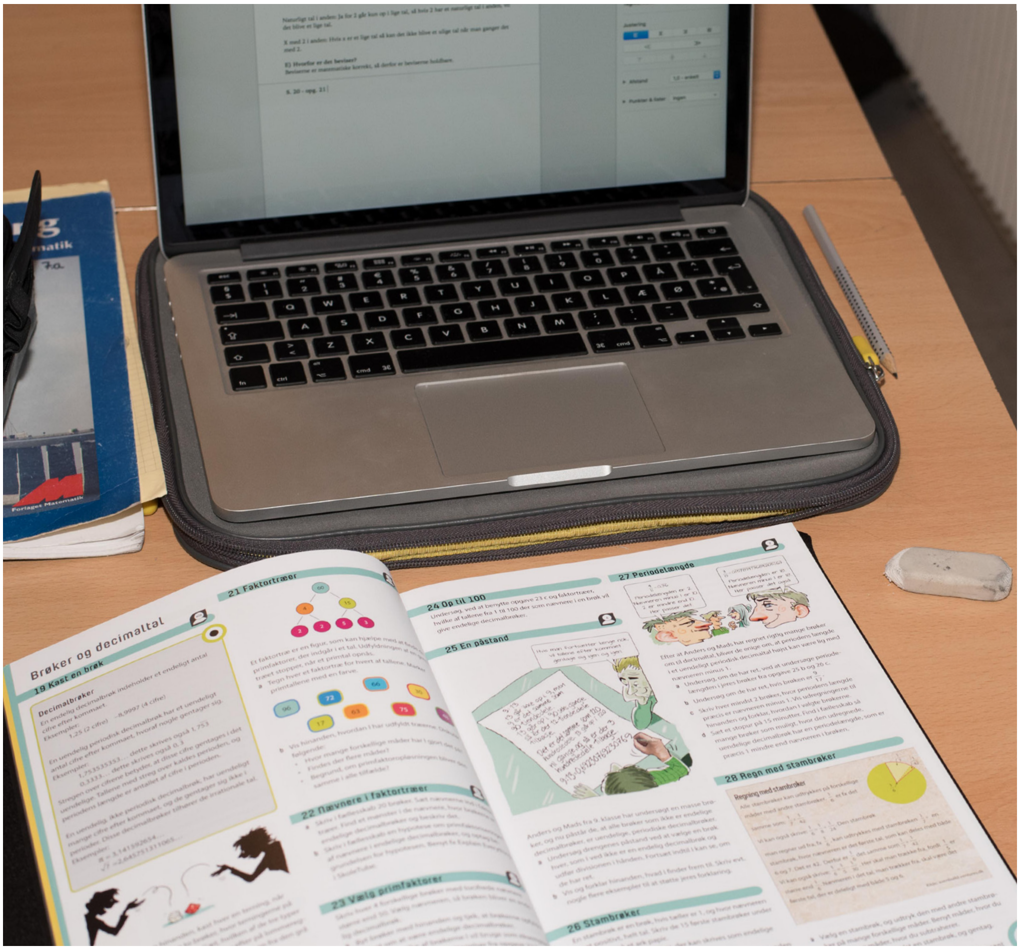
Dialektikken mellem fag og redskab

Eksemplerne ovenfor er i deres matematiske substans enkle, men ikke nødvendigvis nemme. De omhandler helt basale egenskaber ved aritmetik og decimaltal. De viser, at inddragelse af digitale teknikker kan give nye perspektiver såvel i form af, hvad de leverer til os (output) og i form af, hvad der skal til for at forstå, hvad leveringen egentlig går ud på. Dette illustrerer en fundamental dialektik mellem fag og redskab. Der er tale om en vekselvirkningsprogression mellem det lys, som digitale og ikke-digitale teknikker kaster over den bagvedliggende problematik. Det er derfor at 'tænd-sluk' er en forfladiget didaktisk tilgang. Der er ikke tale om to gensidigt udelukkende valgmuligheder, selvom det er umuligt at skrive med blyant og taste eller bruge mus på samme tid (i hvert fald for os, som ikke er ambidekstrale). Og derfor er CAS ikke blot en side af matematik, som er gjort tilgængelig gennem passende softwareudvikling, men den har transformeret matematik, både fagligt og didaktisk.

Noget tilsvarende kan siges om in- og outsourcing. En aktivitet kan ikke både være kerne og ikke-kerne. Ligesom CAS eller ikke-CAS er det en enten-eller afgørelse. En teknik kan ikke både være insourcet og outsourcet. Men in- og outsourcing indgår i et dialektisk forhold under dannelsen af elevernes læring.

Det afgørende valg

I selve beslutningen om anvendelse af CAS ligger en fundamental outsourcing. Læreren har ingen kontrol over CAS-programmets underliggende kodning (jf. Excels metode for afrunding af decimalbrøker), syntaks, bibliotek af rutiner, osv. De fleste CAS-værktøjer er designet med undervisning for øje, i hvert fald delvist. De kan derfor være udviklet med didaktiske intentioner, som læreren må underlægge sig eller kan sætte ud af funktion, om muligt. "Clickable-math" i Maple er et godt eksempel herpå. Maple har faktisk udviklet et væld af Apps med undervisning for øje. Det er



særdeles lærerigt at underlægge dem en out-/insourcing analyse af matematiske kerneaktiviteter.

Læreren har naturligvis til alle tider været underlagt didaktiske intentioner i de ressurser, som har været til rådighed, fx lærebøger. En lærebog opererer med matematikaktiviteter på mange niveauer. Læsning af den kræver en palet af særlige teknikker indbefattende indre dialog, hvor opgaver og øvelser er målrettede aktiviteter, osv. Det hele fremtræder med hensigten af fremme læring, men i lærebogsskribenternes optik. Imidlertid var de didaktiske valg, som læreren måtte foretage i relation hertil, mere overskuelige, så læreren var bedre klædt på. Selv hvis læreren lod lærebogen 'køre med sig', altså outsourcede kerneaktiviteter, var skaden til at overse. Man var jo del af en tradition, som på mange måder holdt skuden på ret køl.

- Sådan er det ikke i dag, vel?

Videre læsning
(i tilfældig rækkefølge)

1. Om kodning af CAS: Hvilke overvejelser gør CAS-designeren sig, og hvad er konsekvensen af de valg, som nødvendigvis må gøres?

   Stoutemyer, D. R., (1991). *Crimes and misdemeanors in the computer algebra trade*. Notices of the American Mathematical Society, 38(7), 778-785.

2. Om storskala effekt af digitalisering. Undersøgelser som søger statistisk evidens for læring gennem den blotte (uspecificerede) anvendelse af IT:

   OECD (2015), *Students, Computers and Learning: Making the Connection*, PISA, OECD Publishing. from http://dx.doi.org/10.1787/9789264239555-en

   Mogensen, A., Bull, A. & Hansen, M. H. H. (2016) *CAS i folkeskolens matematikundervisning med øget læringsudbytte for drenge på mellemtrinet.* MONA, 2016-1, 7 - 20.

3. En kortlægning af udvalgte landes brug af og syn på anvendelse af digitale teknologier i undervisningen:

   Drijvers, P., Monaghan, J.,Thomas, M. and Trouche, L. (2015). *Use of Technology in Secondary Mathematics*. Final Report for the International Baccalaureate. from http://www.ibo.org/globalassets/publications/ib-research/technologyindpmathematicsfinalreport.pdf

4. Andre undersøgelser af “almindelige læreres” beslutninger:

   Drijvers P., Trouche L. (2008) *From artifacts to instruments: A theoretical framework behind the orchestra metaphor*, Research on technology and the teaching and learning of mathematics, 2, 2008, 363¬392

5. Om læreres resurser (inklusive digitale), design af undervisning, udvælgelse af materiale m.m.:

   Gueudet, G. and Trouche, L. (2009) *Towards new documentation systems for teachers?* Eductional Studies in Mathmatics, 71(3), 199 – 218

6. Det teoretiske grundlag for kapitlets syn på aktiviteter bygger på begrebet *prakseologi*, som er fundamentalt i the Anthropological Theory of Didactics (ATD):

   Chevallard, Y, Sensevy, G. (2014) *Anthropological Approaches in Mathematics Education, French Perspectives* in Encyclopedia of Mathematics Education, Springer 2014, 38 – 43.

7. En mere teoretisk tilgang til kapitlets tematik:

   Bang H., Grønbæk N. & Larsen, C. (2016) *Out- and insourcing, an analysis model for use of instrumented techniques* (under review)

8. En lærebog om in- og outsourcing i virksomhedsøkonomi:

   Schniederjans, M. J., Schniederjans, A. M. and Schniederjans, D. G. (2005). *Outsourcing and Insourcing in an International Context*. Armonk, US: M.E. Sharpe, Inc.,

9. Om instrumental genesis, dvs. tilvirkning af et digitalt redskab fra at være blot en genstand til at blive et instrument:

   Trouche, L (2014) *Instrumentation in Mathematics Education*, in Encyclopedia of Mathematics Education, Springer 2014, 307 – 313.