

Abstract

I Fælles Mål indgår digitale værktøjer som en fast del af adskillige mål, lige fra målbeskrivelser af de matematiske kompetencer til målbeskrivelser af de specifikke stofområder. Hvad dækker disse digitale værktøjer over i matematikundervisningen? Det vil jeg forsøge at belyse med denne artikel.

Udover en række specifikke værktøjer nævner Fælles Mål også produktions-/kommunikationsværktøjer. Brug af digitale værktøjer omtales i Fælles Mål, i læseplanen og i de tværgående afsnit om it og medier. Der er derfor ikke tvivl om, at de skal bruges. Jeg vil i kapitlet komme ind på mulige begrundelser for brug af digitale værktøjer i undervisningen. Jeg vil desuden omtale overvejelser ved indkøb af programmer.

Undervejs i artiklen og til sidst stiller jeg nogle refleksionsspørgsmål til læseren. Det er spørgsmål, som det kan være konstruktivt at drøfte i fagteamet eller i en gruppe af matematiklærere, som vil se nærmere på digitale værktøjer i undervisningen og i egen praksis.



Forfatter

Rikke Teglskov

Pædagogisk konsulent på Center For Undervisningsmidler UC Lillebælt.

Matematiklærer i folkeskolen 2001-2012

Medlem af opgavekommissionen siden 2013.

Medlem af Det Danske GeoGebra Institut

Udgivelser

Forfatter/konsulent på materialer til matematik i grundskolen

herunder MULTI (Gyldendal) og elæringsmodulerne til GeoGebra.

National fagkoordinator for matematik i Lærernetværket for IT i Folkeskolens fag.

Medtilrettelægger af Danmarks Matematiklærerforenings

opkvalificeringsindsats i it og matematik for lærere

i grundskolen 2016/17

Kapitel 3

Digitale værktøjer i matematikundervisningen

Jeg vil i denne artikel forsøge at give et kort rids fra indskoling til udskoling over hvilke digitale værktøjer, der forventes at være i spil i matematikundervisningen. Vi ved, at det er vigtigt for læreren på ethvert trin af undervisningen at have kendskab til, hvad der kommer før og efter. På samme måde bliver det afgørende for lærerens brug af digitale værktøjer på et bestemt trin at have overblik over værktøjernes art og brugen af dem gennem hele forløbet. Hvis ikke vi som matematiklærere har et blik for den røde tråd, den progression, der er i vores fag, hvordan kan vi så undervise eleverne hensigtsmæssigt?

Dannelse til det 21. århundrede

Inden jeg kaster mig ud i detaljerne, vil jeg lige tage læseren med op i helikopteren og stille spørgsmålet: Hvorfor skal vi overhovedet forholde os til digitale værktøjer? Selvom brugen af digitale værktøjer er obligatorisk, mener jeg, at vi forsømmer vores pligt som lærere, hvis vi ikke stiller os selv og hinanden det spørgsmål fra tid til anden.

Matematik spiller en rolle i mange globale, nationale og lokale sammenhænge i elevernes fremtidige liv efter skolen, og brug af digitale værktøjer i undervisningen vil have potentiale til at give eleverne en bedre forståelse af baggrunden for brug og misbrug af matematik i den demokratiske proces. Matematik er et dannelsesfag. Derfor denne lille opgave:

Refleksion 1

- ★ Læs eller genlæs fagformålet for faget matematik. Beskriv på 1 minut, hvorfor du, ud fra din læsning af fagformålet og din holdning til matematikfaget generelt, tænker, at elever skal beskæftige sig med matematik og med digitale værktøjer

Det er altså for mig at se et spørgsmål om dannelse til det 21. århundrede, og den dannelse har teknologien som en præmis, fordi teknologi eller teknologier spiller en stor rolle her. Der var på et tidspunkt megen fokus på at tale om digital dannelse, som en særlig dannelse eleverne skulle have i forhold til teknologi eller digitale medier og værktøjer. Jeg mener egentlig, at den korrekte diskussion er at tale om dannelse som helhed.

Derfor vil jeg gerne starte med at tage jer med til det afsnit i læseplanen, som handler om it og medier.

De fire elevpositioner

Som en erstatning for det tidligere faghæfte 48 It- og mediekompetencer i folkeskolen, er it og medier nu skrevet ind i alle fag. Det vil sige, at der er tale om en inddragelse af it og medier, med hvert fags særlige kendetegn som signatur for måden inddragelsen skal foregå på. It- og mediekompetencerne skal eleverne udvikle løbende, og de skal opleve, at it og medier indgår helt naturligt i alle fag for at afspejle den virkelighed, der er omkring skolen, hvor dette i høj grad er tilfældet. Med teknologien opstår nye muligheder og landvindinger på arbejdsmarkedet og i samfundet, og teknologien skal også indgå i hele skoleforløbet, så eleverne dels udvikler kompetencer i at benytte teknologi, men også kompetencer i at forholde sig kritisk til teknologien. De fire elevpositioner betragter jeg som en eksemplificering af, hvordan digitale værktøjer støtter eleverne i at udvikle kompetencer til det 21. århundrede. Man kan tænke, at det måske er lidt højtravende at skulle forholde sig til disse meget overordnede ting, men jeg beder om lidt tålmodighed fra læseren, for min erfaring er, at rigtig mange lærere siger: Nå ja, det gør vi jo i forvejen. Det er altså ikke nødvendigvis nyt og forkromet, men det er et spørgsmål om, hvor bevidste vi selv er om det, og hvor tydelige vi er over for vores elever om dette fokus på faget.

Læseplanen beskriver fire elevpositioner, som jeg kort vil belyse herunder. De er interessante at indlede denne artikel med, fordi de påvirker den måde, hvorpå de digitale værktøjer kan og bør inddrages i undervisningen.

1. Eleven som kritisk undersøger

Eleverne skal opleve at være kritisk undersøgende i matematikundervisningen. Det falder meget godt i tråd med den åbne og undersøgende måde at arbejde med matematik på, som har været anerkendt i fagdidaktikken i mange år. Men eleverne bliver ikke kritisk undersøgende af sig selv. De lærer ikke af sig selv, hvordan de skal kunne lave en undersøgelse. De må altså støttes i at udvikle gode strategier til at kunne være kritiske undersøgere. Fx have systematik, undersøge et tilfælde ad gangen, udvælge modeller som de vil undersøge osv. Elevernes arbejde indenfor problem-

behandlings- og modelleringskompetencen falder godt i tråd med dét at være kritisk undersøger. Det centrale er, at eleverne også oplever it som et redskab i deres kritiske undersøgelser. Det kan fx være CAS, regneark og dynamisk geometri. En del af det at være kritisk undersøger er også, at kunne vurdere egne resultater kritisk. Er de holdbare? Er der nogle faktorer, jeg har glemt at tage højde for? Og så videre. Det er min erfaring, at det er bydende nødvendigt at bruge tid på at tale med eleverne om dette i hele skoleforløbet. Eleverne lærer ikke at få et metakognitivt blik på deres eget arbejde, hvis vi ikke udfordrer dem på det. Eleverne vil meget gerne aflevere et tal - måske sætter de endda to streger under, og så er det hele færdigt. Videre til næste opgave. Men sådan er virkeligheden ikke. Meget få job lader sig affærdige med et tal, et forsøg, et eksempel. Der må ofte mange perspektiver til, og vi må overveje, om vi har fået alle sider belyst. Det er klart, at man ikke kan stille samme metakognitive krav til en elev i 1. klasse som en elev i 9. klasse, men elever i 1. klasse kan godt vurdere kvaliteten af eget arbejde, hvis vi udfordrer dem på det.

Eksempel fra indskolingen. Eleverne skal undersøge prisen på aftensmad:

Eleverne kan vurdere familiens størrelse, hvilket supermarked familien handler i, om den køber økologisk eller konventionelt osv. Ikke sådan forstået, at hver eneste elev undersøger hvert eneste parameter, men klassen som helhed kan bidrage med små delundersøgelser og være med til at diskutere, om der er ting, vi har glemt at tage højde for. Hvordan holder vi så styr på alle de muligheder vi finder frem til? Her kan digitale værktøjer i den grad være med til at fastholde beregninger, eksempler med mere, så vi kan sammenligne sidenhen.

2. Eleven som analyserende modtager

Eleverne skal opleve at være analyserende modtagere i matematikundervisningen. Af hvad? – kan man så tænke. Af matematikholdige informationer. Som borger oplever man mange elementer i omverdenen, der indeholder matematikholdige informationer: Diagrammer, køreplaner, tabeller, priser, grafer, modeller, figurer osv. De optræder bare ikke altid i en pæn mundret bid som i en matematikbog. Det gør de faktisk meget sjældent, når vi bevæger os uden for skolen. Den type informationer skal eleverne på sigt selv kunne analysere i et matematisk perspektiv, og derfor skal de klædes på til dette i løbet af undervisningen. Det kan godt være, at det starter i matematikbøgerne, eller i små udvalgte brochurer eller diagrammer, hvor man så gradvist slipper eleverne mere og mere fri til, på egen hånd, at finde tekster og analysere dem i et matematisk perspektiv. De matematikholdige tekster er ofte meget indholdstunge, men meget ordfattige. Jeg ser meget af det arbejde, der foregår rundt om på skolerne med den faglige læsning i matematikfaget, som en del af arbejdet med at kvalificere eleven som analyserende modtager. Vi skal altså bruge tid i undervisnin-

gen på at diskutere med eleverne, hvordan de forstår disse tekster. Og vi skal bruge tid på at hjælpe dem til at vide, hvor de kan finde egnede oplysninger.

Eksempel fra udskoling – statistiksøgning:

Man kan hente mange informationer på Danmarks Statistik, men hvordan udvælger man og begrænser sin søgning? Hvor mange år skal vi tage med? Hvor mange parametre? Og hvordan kan vi så præsentere de data, vi har undersøgt? Hvilke andre steder end Danmarks Statistik er relevante? Det kommer meget an på de data, man søger efter, men en god strategi kan være, om eleverne lærer at vurdere kildens troværdighed. Eksempelvis har Danmarks Idrætsforbund måske mere troværdighed i deres tal, end Jens Jensens private hjemmeside osv.

Der er også mange eksempler på, hvordan data manipuleres i grafiske fremstillinger, som bruges i adskillige medier, og her vil mange let forståelige eksempler tjene til gode analyser i undervisningen i især 2. og 3. trinforløb. Igen kredser vi om en metakognitiv bevidsthed, der skal udvikles, og der skal vi som lærere hjælpe til, ved at være tydelige på disse elevpositioner.

3. Eleven som målrettet og kreativ producent

Eleverne skal opleve at være målrettede og kreative producenter af indhold fra matematikundervisningen. Ved at inddrage digitale værktøjer kan man i høj grad spille



sammen med elevernes brug af teknologi uden for skolen. Stort set alle elever navigerer i dag uden problemer rundt på YouTube efter informationer. De finder vejledninger til, hvordan de fx kan opsætte Minecraftserver, flette hår, lægge make-up, få en høj level i computerspillet osv. De erfaringer, eleverne får med brug af digitale medier uden for skolen i deres fritidsliv, kan vi trække på og inddrage i skolen. I stedet for en skriftlig besvarelse, kan eleverne producere en video, en skærmoptagelse, en billedsamling, en animation osv. De multimodale udtryksformer, som de digitale værktøjer giver os, giver eleverne den mulighed, at de alle kan få en stemme i matematikfaget. Ingen er begrænset af ikke at kunne skrive en tekst, da det multimodale tillader alle former for kommunikation. Og det er en kommunikationsform, som repræsenterer de kommunikationsformer, der er i spil i den verden, der er uden for skolen.

Eleverne skal på sigt udvikle en bevidsthed om, hvilken måde at præsentere et matematisk indhold på, der er mest hensigtsmæssig i en given situation. Hvis man fx skal præsentere og argumentere over for skolebestyrelsen og lærerkollegiet, vil man formentlig bruge en anden præsentationsform, end hvis man skal præsentere noget for eleverne fra samme årgang. Det at være målrettet i sin produktion kræver i høj grad en bevidsthed om afsender- og modtagerforhold. Den skal vi udfordre eleverne til at udvikle. Et rigtig vigtigt element i denne proces er, at eleverne møder og spejler sig i hinandens produkter.

Evaluering:

Et andet element omkring elevproduktioner, som jeg synes kan have særlig betydning for læreren/underviseren, er elevernes produktioner. De kan her løbende præsentere deres tænkning om og præsentation af arbejdet med faget. Hvis vi formår at opsamle og bearbejde disse produktioner, kan de give adgang til en række data vedrørende elevernes faglige niveau og udvikling i faget. Der ligger med andre ord et stort evalueringspotentiale i disse produktioner, som vi skal forsøge at inddrage i den løbende formative evaluering af eleverne. Jeg mener ikke, at en lærer nødvendigvis skal sidde, i sin efterhånden sparsomme tid til forberedelse og se hver elevfilm, eller analysere hvert elevprodukt til mindste detalje. Men disse data kan give os noget andet end fx en test kan. Vi kan undervejs opfange, hvis eleven har en faglig misopfattelse, og vi kan måske hjælpe eleven på rette vej i læreprocessen. Man kan ikke nå omkring alle elever hele tiden, men eleverne i en klasse kan godt se hinandens produkter, og de kan arbejde med en kultur, hvor de, hvis de møder forskellige faglige opfattelser i deres elevprodukter, stopper op og reagerer og fx inddrager læreren i deres drøftelser. Læreren kan også nå at se nogle produktioner i skabelsen og måske trække nogle frem til fælles drøftelser i klassen. Man kan arbejde med portefølje og lade elevernes produktioner indgå i porteføljen. Nogle steder arbejder lærerne med porteføljeblogs, som rummer et hav af multimodale produktioner fra hver elev.

4. Eleven som ansvarlig deltager

Eleverne skal udvikle digitale færdigheder i at være ansvarlige deltagere, eksempelvis deltagere i samfund, arbejdsliv, fritidsliv osv. I matematikundervisningen skal de være ansvarlige deltagere i læreprocessen og den faglige udvikling, som klassefællesskabet skal igennem. De skal kunne samarbejde, dele viden og kommunikere ved hjælp af digitale værktøjer. En del digitale værktøjer giver mulighed for, at eleverne kan arbejde samtidig i samme fil, fx regneark. På den måde giver en fælles dataindsamling lige pludselig mulighed for, at en hel klasse kan bidrage med data. Sågar to klasser forskellige steder i landet eller verden kan gøre dette. Det betyder, at den enkeltes bidrag bliver vigtigt, for at hele gruppen får det datasæt, de skal bruge for at kunne komme videre, og man har et fælles ansvar for at alle kommer i mål.

Hvis eleverne har produceret en video, kan den måske bruges af en anden klasse, og på den måde kan eleverne opleve, at de har noget at bidrage med til et større fællesskab end lige klassefællesskabet. Det kunne også tænkes, at de elever, som modtager andres videoer, kan give konstruktiv feedback og på den måde lære at forholde sig til, hvordan man gør dette på en ansvarlig og etisk god måde.

Eleverne skal også udvikle en bevidsthed om, hvad det vil sige, at være ansvarlig deltager. Hvis eleverne fx bruger en video fra YouTube til noget i deres faglige arbejde, hvordan behandler de så videoen? Skriver de fx en negativ kommentar i videosporet? Skriver andre negative kommentarer til deres videoer? Hvad gør det ved os eller ved andre, når de sociale medier er ansigtsløse, og alle kan komme med mere eller mindre konstruktiv feedback på det, man har delt? Det er ikke sikkert, at de sociale medier fylder så meget i matematikundervisningen som i andre fag, men ikke desto mindre fylder matematik ofte noget i de ting, der deles på sociale medier. Her er ofte en lidt latterliggørende tone af nogle, som ikke har så stor en faglig viden. En pige, som ikke forstår en pizza-deling, eller en fartberegning osv. Det kan vi godt forholde os til i matematikundervisningen i et etisk perspektiv.

Jeg har valgt at starte artiklen næsten der, hvor læseplanen for faget slutter. Det har jeg fordi de måder at bruge digitale værktøjer på, som rides op i afsnittet om it og medier, siger noget om, hvordan vi skal inddrage digitale værktøjer. Det vil jeg gerne have, at læseren har med i baghovedet, når vi dykker ned i det mere faglige af matematikken. Først vil jeg dog gerne lige gøre et refleksionsstop.

Refleksion 2

- ★ Tænk tilbage på din egen undervisning og på de fire elevpositioner, du lige har læst om. Hvordan kommer de fire elevpositioner til udtryk i din egen undervisning?
- ★ Er der elevpositioner, som du er bedre til at få i spil end andre?
- ★ Er der elevpositioner, du må blive klogere på?

I det følgende kigger vi nærmere på, hvad der står i Fælles Mål og i læseplanen for hele skoleforløbet.

1. trinforløb

Digitale værktøjer til repræsentation

I 1. trinforløb, 1.-3. klasse, forventes eleverne at møde interaktive repræsentationer, fx i form af apps, digitale læremidler mv. Det er i arbejdet med elevernes repræsentationskompetence og som led i arbejdet med at støtte elevernes begrebsopbygning, at de faglige begreber tilknyttes matematikken. Det kan fx være en tallinje, der kan trækkes i – zoomes på, så eleverne dels får visualiseret tallinjen som repræsentation, men også får visualiseret, hvordan tallinjen er dynamisk, og hvordan positionssystemet og tallinjen hænger sammen. Det kan også være en interaktiv positionsplade, som kan veksle tiere til enere eller omvendt, eller det kan være det interaktive sømbræt, hvor eleverne skal bygge forskellige trekkanter, som de efterfølgende sammenligner, så de får et nuanceret billede af, hvor forskellige trekkanter kan se ud. Det er altså repræsentationer, som kræver ageren af brugeren, og som giver eleverne mulighed for at kunne gøre noget og se et resultat. Det betyder ikke, at eleverne ikke længere skal arbejde med konkrete analoge værktøjer som centicubes, sømbræt, geobrikker osv. De digitale repræsentationer er blot én repræsentationsform blandt mange, som eleverne skal møde. Hver repræsentationsform har sine styrker og svagheder, og det er centralt, at eleverne møder mange repræsentationer med henblik på at styrke dannelsen af deres begrebsbilleder. (Tall & Vinner, 1981)

Digitale værktøjer til kommunikation

Det forventes, ved afslutningen af 1. trinforløb, at eleverne kan bruge digitale værktøjer til at kommunikere matematik. De skal helt konkret kunne bruge digitale værktøjer til skærmoptagelse, lydoptagelse og til stillbilleder. Det er altså centralt, at eleverne oplever, at digitale værktøjer er en naturlig del af arbejdet, når vi kommunikerer i, om og med matematik, og at det arbejde fortsætter gennem hele skoleforløbet. Her er altså nogle specifikke krav, som i høj grad lægger sig op ad de fire elevpositioner, jeg har indledt artiklen med. Skærmoptagelse er et godt redskab, fordi eleverne kan se det, de skal udtrykke sig om, samtidig med at de fortæller. Skærmoptagelse kan både være på computeren, hvor eleverne optager skærmen, mens de fortæller, men det kan også være mere lavpraktisk, hvor de optager en bog eller en skærm med en anden device, fx en tablet, så de i realiteten bare laver en videooptagelse. Brugen af skærmoptagelse kan på den måde give læreren mulighed for at stille eleverne over for opgaver, hvor de skal producere nogle produkter, der skal vise deres forståelse af

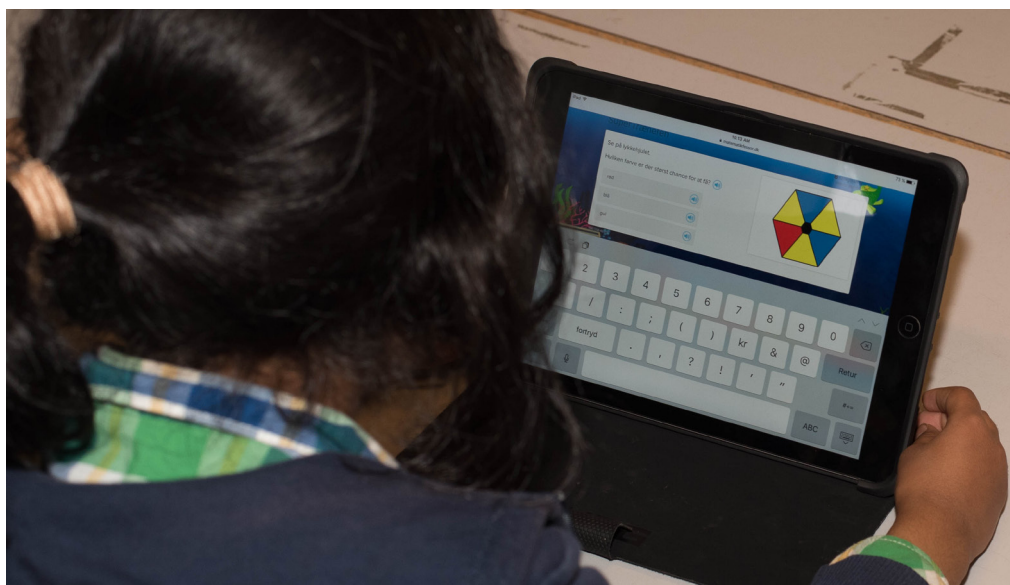
et matematisk begreb, en sammenhæng eller lignende. Forståelsesprodukterne kan dels være et her-og-nu billede af, hvor eleven er rent fagligt, men de kan også være en guldgrube for de andre elever at se på og lytte til, fordi de har stort udbytte af at spejle sig i hinandens produkter.

Lydoptagelse har også nogle oplagte potentialer. Skærmen, og det at kunne få visualiseret noget, er et stærkt middel til læring. Men nogle gange skal eleverne tage skridtet til selv at danne egne indre billeder og repræsentationer. Den visualisering kan vi hjælpe på vej, ved at lade eleverne lave lydoptagelser.

Lydoptagelserne kan fx være regnefortællinger, men det kan også være simple forklaringer af figurer, diagrammer eller andet. Ved at skulle fortælle uden visuel støtte, skal man have et overblik og kunne skabe en rød tråd i sin fortælling. Og ved at skulle lytte til andres fortællinger, skal man selv kunne visualisere det, der fortælles om, og derved danne sine egne indre billeder.

Digitale værktøjer som hjælpemidler

I forbindelse med hjælpemiddelkompetencen forventes det, at eleverne i 1. trinforløb skal udvikle færdigheder i at bruge *lommeregner*, *regneark* og et *dynamisk geometriprogram* som hjælpemidler. Eleverne skal altså lige så naturligt, som de vil bruge en blyant til at skrive med, en lineal til at måle med, tællebrikker til at tælle med osv., kunne bruge lommeregneren til regning, regnearket til fx at behandle data og til at regne med, samt bruge dynamisk geometri til at tegne, foretage flytninger og undersøge egenskaber ved geometriske figurer. På næste side følger nogle overvejelser over hjælpemiddelkompetencen.



Hjælpemidlerne i matematikundervisningens to ben	
Hjælpemidlernes tekniske ben	Hjælpemidlernes didaktiske ben
<p>Vi kan fx med dynamisk geometri tegne mere præcist, end vi kan tegne i hånden. Vi kan på lommeregneren regne hurtigere og måske mere rigtigt, end vi kan i hovedet, i hvert fald hvis tallene bliver vanskelige nok, og vi kan i regnearket håndtere og overskue data bedre, end hvis vi har dem på papir. Betyder det, at vi skal holde op med at gøre tingene analogt? Nej absolut ikke, men vi skal vise eleverne, at der er flere veje at gå. Nogle gange er tallene sådan, at det er hurtigst at regne i hovedet. Måske betyder præcisionen heller ikke så meget. Andre gange er tallene svære at regne med i hovedet eller på papir, og da vil lommeregneren være mest hensigtsmæssig. Mogens Niss definerer bl.a. på matnet.dk's webinar, at it kan være en kapacitetsforstærker.</p>	<p>Det andet ben vil jeg kalde pædagogisk eller didaktisk. De digitale værktøjer kan visualisere de matematiske begreber, og ved at lade eleverne undersøge fx geometriske egenskaber i et dynamisk geometriprogram, kan de lære noget om et givent fagligt begreb ved at arbejde i værktøjet. Det digitale værktøj kan på den måde være et middel til erkendelse eller til læring, hvis vi inddrager det som sådan i undervisningen og sætter eleverne i situationer, hvor de skal undersøge matematiske begreber og sammenhænge. Meget matematik ligger lige til højrebenet at opdage, hvis vi skaber rammerne og sætter scenen.</p>

Det er ikke altid entydigt, hvornår de digitale værktøjer fungerer som en teknisk hjælp, og hvornår de bliver et middel til læring, men det gode spørgsmål at stille sig selv, som matematiklærer kan være:

Refleksion 3

- ★ Hvad kendetegner min praksis i forhold til inddragelsen af it i min matematikundervisning?
- ★ Er jeg tekniker i min tilgang til brugen af it?
- ★ Bruger jeg det som et stillads til læring?
- ★ Gør jeg begge dele?
- ★ Hvilke eksempler kan jeg komme i tanke om fra min egen praksis?

Stofområderne i 1. trinforløb

I arbejdet med *tal og algebra* forventes eleverne at kunne udføre beregninger med digitale værktøjer. Der nævnes lommeregner og regneark som støtte i elevernes udvikling af talforståelse. Man kan godt tænke et CAS-værktøj ind her, eller et værktøj med CAS-funktioner, hvis vi fx kan se en lommeregner som My Script Calculator som et CAS-værktøj, om end et meget simpelt et af slagsen. Når eleverne arbejder med regnehistorier eller tekstopgaver, skal de oversætte fra en hverdagsituation til et regneudtryk, og det kan være en svær øvelse. Det centrale i at bruge lommeregneren er, at eleverne frikøber nogle mentale resurser, så de ikke bruger alle kræfterne på at regne, men hellere på at opstille et regneudtryk og vurdere et resultat fra lommeregneren. Men der er også en vigtig pointe i, at elevernes tænkning ikke altid matcher den tænkning, læreren har i forhold til en regnehistorie. Fx regnehistorien i boksen:

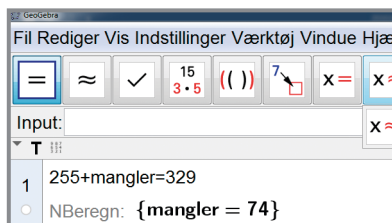
Noah har sparet 255 kr. sammen. Han vil gerne købe en fjernstyret bil, som koster 329 kr. Hvor mange penge mangler Noah?

Mange matematiklærere vil givetvis tænke, at det er en klassisk subtraktionskonstekt. Men eleverne vil måske tænke: "Hvad skal jeg plusse med 255 for at få 329" - oversat til symbolsprog: $255 + ? = 329$ eller $255 + \text{mangler} = 329$.

Her er vi altså i gang med at skrive et simpelt algebraisk udtryk, en enkel ligning. Hvis vi bruger GeoGebra, kan vi skrive et ord eller et bogstav for den ubekendte – og det samme i mange andre CAS-værktøjer.

Vi skal ikke være bange for, at eleverne bruger et værktøj, som kan mere, end de skal bruge på et givent klassetrin. Vi andre bruger jo kun brøkdele af regnearkets funktioner eller ethvert andet program. Men vi skal blive gode til at vælge værktøjer, som kan støtte elevernes tænkning, og som kan fastholde nogle dyk ned i det matematiske sprog.

I arbejdet med *geometri og måling* forventes det, at eleverne kan bruge et dynamisk geometriprogram til at lave geometriske tegninger, og de skal kunne bruge digitale værktøjer til at undersøge og beskrive mønstre med spejlingssymmetri. Desuden skal eleverne kunne bruge digitale måleværktøjer. Det er vigtigt, at eleverne både får erfaringer med fysisk måling, samt oplever hvordan digitale måleværktøjer kan bruges. En god øvelse kan være at sammenligne en balancevægt med lodder med en digitalvægt. Dynamisk geometri kan samtidig hjælpe til at foretage målinger, eleverne ikke



selv kan på det pågældende tidspunkt. Det kan fx være at måle arealet af en figur, som eleverne på det pågældende tidspunkt ikke selv kan beregne arealet af, men som de har brug for at kende for at kunne løse et problem, om fx størst muligt areal.

I det hele taget gennemsyrrer det at arbejde undersøgende hele området for geometri og måling. Men alle undersøgelserne skal ikke nødvendigvis foregå vha. digitale værktøjer. Det kunne måske være interessant at spørge sig selv og gode kolleger:

Refleksion 4

- ★ Hvilke undersøgelser i geometri egner sig ikke til digitale værktøjer?
- ★ Hvilke undersøgelser i geometri er umulige at lave uden digitale værktøjer?
Find et par eksempler på undersøgelser i hver kategori.

I arbejdet med *statistik og sandsynlighed* forventes eleverne at kunne bruge regneark til at ordne data. Det kan fx være at lave cirkeldiagrammer over kategoriale data (data med kategorier, fx grøn, blå, brun eller hund, kat, kanin, undulat) eller måske ordne fra mindst til størst, hvis man arbejder med diskrete data (talværdier).

2. trinforløb

Inden jeg gennemgår 2. trinforløb, vil jeg lige minde om, at alt det, der er beskrevet i 1. trinforløb også er gældende i dette forløb, det nævnes bare ikke igen i målene eller læseplanen.

Digitale værktøjer til problembehandling

I forbindelse med *problembehandlingskompetencen* skal eleverne i dette trinforløb udvikle forskellige strategier til problemløsning, blandt andet det at kunne inddrage digitale værktøjer som regneark, dynamisk geometri og CAS. Der lægges vægt på, at eleverne skal kunne sammenligne deres forskellige strategier og tilgange til problemløsning. Det er første gang CAS nævnes i læseplanen. Det betyder, at vi har endnu et digitalt værktøj til rådighed i matematikundervisningen. Det er vigtigt, at vi som lærere er bevidste om, at eleverne skal præsenteres for forskellige strategier, der indtager forskellige digitale værktøjer, i arbejdet med matematik. Samtidig er vi inde at arbejde med elevpositionen som kritisk undersøger.

Refleksion 5

- ★ Hvordan udvikler jeg en bevidsthed hos eleverne om den gode strategi for problemløsning?

- ★ Hvornår er det en fordel at arbejde i digitale værktøjer?
Og hvornår er det en fordel at lade være?
- ★ Hvordan kvalificerer jeg elevernes valg og evne til at reflektere over den gode strategi i en given situation?
- ★ Er jeg tydelig i min undervisning om denne proces?

Undersøgende og eksperimenterende arbejde

I forbindelse med arbejdet med *ræsonnements-* og *tankegangskompetencen* er det centralt, at eleverne arbejder undersøgende og eksperimenterende. Det er et krav, at det arbejde også foregår ved hjælp af digitale værktøjer. Eleverne skal kunne udtænke ræsonnementer, og de skal kunne følge andres ræsonnementer. Dynamisk geometri er fremragende til at støtte elever i at formulere enkle ræsonnementer på dette trin. Det kunne fx være et ræsonnement om vinkelsummen i trekanter, på baggrund af undersøgelse af en hel masse trekanter i et geometriprogram. Det kunne også være ræsonnementer om sandsynlighed på baggrund af simulering i regneark eller lignende. Der er mange muligheder, men det er centralt, at vi sørger for at stoppe op en gang i mellem og sætte på dagsordenen, at der skal formuleres ræsonnementer. Her vil skærmoptagelse eller lydoptagelser kunne støtte dette arbejde for eleverne, så de gradvist arbejder med at formulere ræsonnementer, først mundtligt og sidenhen skriftligt. De digitale værktøjer skal således stadig støtte elevernes *kommunikation* med og om matematik.

Stofområderne i 2. trinforløb

I arbejdet med *tal* og *algebra* forventes det, at eleverne kan bruge regneark til beregninger vedrørende hverdagsøkonomi. Det kan være enkle budgetter i forbindelse med indkøb i husstanden eller lignende. Eleverne skal også, sideløbende med at de udvikler gode hovedregningsstrategier, kunne inddrage digitale værktøjer som lommeregner, regneark og CAS, når de skal foretage beregninger, især hvis tallene ikke er velegnede til hovedregning, som det ofte er gældende med *procentberegninger*. Det er således centralt, at eleverne får blik for, hvilken strategi der bedst kan betale sig med de tal, de har med at gøre her. Man kunne fx diskutere med dem: *Kan I regne det hurtigere i hovedet, end hvis I først skal starte computeren/finde lommeregneren frem? Er det vigtigt, at resultatet er meget præcist?*

Her tror jeg også, at man skal give god tid til fordybelse som matematiklærer og diskutere med eleverne, hvilken strategi, der er bedst hvor. Måske skal man have nogle opgaver, som eleverne ikke skal regne, men derimod sortere efter, hvordan de skal løses. I hovedet? Med papir og blyant? Med lommeregner? Med CAS? Andre strategier? Eleverne kan sammenligne deres sorteringer – og det kan give anledning til en god diskussion om de forskellige strategiers fordele og ulemper.

I arbejdet med algebra skal eleverne arbejde med uformelle metoder til at løse ligninger.

Her er **GOPE**-strategien essentiel (**G**æt **O**g **P**røv **E**fter). Et digitalt værktøj til at undersøge gættet, fx lommeregner eller regneark, kan være med til at fastholde gættet og regneudtrykket. Hvis eleverne bremses af at regne meget langsomt, kan et gæt tage meget lang tid at prøve efter, og eleverne mister måske overblikket undervejs. Hvis eleverne på lommeregneren kan regne efter, hvad gættet vil give i en ligning, kan de justere gættet efterfølgende. Hvis lommeregneren er for udfordrende, kan eleverne fx få et regneark, som beregner værdien ud fra gættet.

G – gæt
O – og
P – prøv
E – efter

	A	B	C
1	Ligning	$2x+3=15$	
2			
3	gæt		
4	værdi	$=2*B3+3$	
5			

	A	B	C
1	Ligning	$2x+3=15$	
2			
3	gæt	5	
4	værdi	13	
5			

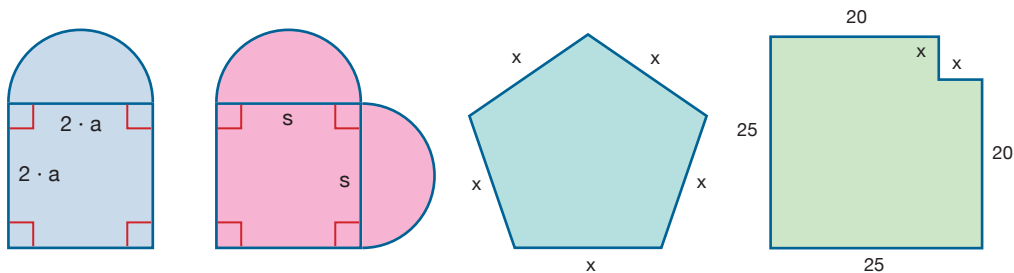
Det er i hvert fald centralt, at sikre sig, at eleven ikke bremses unødigt af et værktøj, og man må derfor undersøge, om man som lærer kan stilladsere opgaveløsningen for eleven. Og her vil eleverne skulle stilladseres forskelligt.

Eleverne forventes at arbejde med formler, fx med areal- og rumfangsberegninger, og de skal på den måde opleve variable i algebraiske udtryk. Her er der to ben i arbejdet med algebra. Det ene er, at eleverne skal opleve at variable, fx i ligninger og formler, kan være pladsholdere for tal. Det andet, som særligt gælder for formlerne, er, at de variable også udtrykker en sammenhæng mellem størrelser. Det er fx ikke alle værdier for højde og grundlinje, som uafhængigt af hinanden giver arealet 12 i en trekant, som vi kan se i boksen til højre.

$$12 = X \cdot 2$$

Endelig skal eleverne arbejde med lineære sammenhænge som en begyndende forståelse af funktionsbegrebet. De digitale værktøjer, fx dynamisk geometri, spiller særligt fint ind her, da flere af dem kan vise sammenhængen mellem algebraisk udtryk og grafisk repræsentation og måske endda tabel.

Jeg tænker også, at CAS er helt central her. Eleverne skal lege med at opstille algebraiske udtryk. Det kan være omkredsformler af mange geometriske figurer, hvor sidelængderne er bogstaver i stedet for talværdier (som vist øverst næste side). De kan lave formler til mundtligt formulerede sammenhænge, fx en formel, som viser sammenhængen mellem antallet af skoleborde og antallet af bordben, en formel som kan bruges til at beregne hvor mange minutter, der er tilbage af en matematiktime osv.



Omtegnet efter: MULTI 6

I 1. trinforløb/indskolingen bruger eleverne lang tid på at udvikle en god talforståelse og på at udvikle gode regnestrategier. I 2. trinforløb skal det arbejde fortsætte, men det skal også overføres til algebra. Eleverne skal udvikle en god algebraforståelse, og de skal udvikle gode regnestrategier, når det kommer til algebraiske udtryk.

CAS-værktøjerne giver eleverne mulighed for at lege med det algebraiske sprog. De kan skrive forskellige algebraiske udtryk, og via CAS kan vi sammenligne udtrykkene og undersøge, om nogle viser det samme.

Hvis vi fx vil arbejde med ligninger, er det at løse en ligning ikke så interessant, når man bruger et CAS-værktøj. Hvis vi nu vendte opgaven på hovedet og gav eleverne opgaven, at de skal skrive så mange forskellige ligninger, de kan finde på, som har svaret 8, vil der være brug for at udforske det algebraiske sprog. Der er gode muligheder for at differentiere og udfordre eleverne ved forskellige benspænd som fx: Du skal have x på begge sider af lighedstegnet i din ligning. Du skal bruge tallet 100 i din ligning, osv.

Da CAS skal indgå i 2. trinforløb i arbejdet med tal og algebra tænker jeg, at det er centralt at drøfte med sig selv og gerne fagteamet:

Refleksion 6

- ★ Hvordan kan vi inddrage CAS, så vi fastholder en undersøgende og eksperimenterende tilgang til tal og algebra?
- ★ Hvilke gode talforståelsesaktiviteter kan vi overføre på algebra?
- ★ Hvilke gode regnestrategiaktiviteter kan vi overføre på regning med algebraiske udtryk?

I arbejdet med *geometri* og *måling* forventes eleverne at kunne bruge dynamisk geometri i arbejdet med geometrisk tegning, og de skal også kunne tegne i 3D i digitale værktøjer. Nogle dynamiske geometriprogrammer kan dette, andre kan ikke, men det kan altid være givtigt at lege med forskellige programmer, når man tegner i 3D.

Man kan ikke undgå dynamisk geometri, når man vil undersøge mange af de geometriske egenskaber og sammenhænge, der kommer i dette trinforløb. Præcisionen i

det dynamiske geometriprogram og hastigheden, hvormed man kan få en masse enkelttilfælde, gør det uundværligt, når eleverne skal generalisere sig til en forståelse af de forskellige geometriske begreber, fx vinkelsum, forhold mellem cirkelns omkreds og diameter, linjers beliggenheder osv.

Eleverne forventes at kunne bruge digitale værktøjer i arbejdet med at producere mønstre med flytninger. Dynamisk geometri er uundværlig i arbejdet med at analysere mønstre med flytninger. Mange programmer giver mulighed for, at man kan analysere billeder fra hverdagen. Det vil sige, at vi kan få hele verden ind i matematikundervisningen og gøre den til genstand for analyse. Vi kan eksempelvis analysere Taj Mahal's symmetri eller sågar et simpelt æble, eller stoffet på Freyas kjole, printet på Noahs t-shirt osv.

Måling eller beregning?

Eleverne skal i forbindelse med måling kunne bruge digitale værktøjer til måling af blandt andet omkreds, areal og rumfang. Det er centralt, at eleverne lærer at skelne mellem en måling og en beregning. Hvornår måler jeg et areal eller et rumfang? Er det en måling, når geometriprogrammet fortæller mig arealet? Dynamisk geometri kan især være en støtte i forbindelse med de figurer, vi ikke kan beregne arealet, rumfanget eller lignende af – eller endnu ikke har lært at beregne areal, rumfang eller lignende af. Dynamisk geometri giver os altså mulighed for at gribe noget matematik, som ligger uden for, hvad eleverne har lært, og alligevel arbejde med det i undervisningen og er samtidig en meget fin mulighed for at kunne gennemskue nogle sammenhænge, som giver os mulighed for at generalisere, hvordan vi kan beregne.

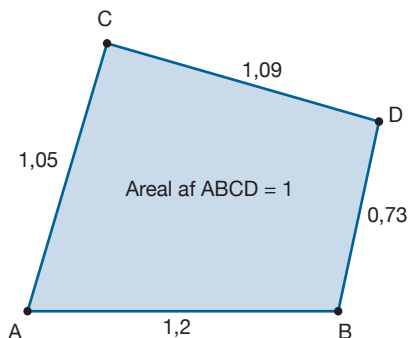
Hvis vi arbejder med forskellige cirkler, måler omkredse i dynamisk geometri, måler diametre og undersøger sammenhængen, kan eleverne næsten ikke undgå at opdage, at der er noget med forholdet mellem omkreds og diameter. Det kan vi jo så bruge til at gå den anden vej – altså, hvis vi har en diameter, kan vi beregne omkredsen, og vi kan kontrollere ved at måle i værktøjet, om beregningen passer.

Det stiller store krav til matematiklæreren. For hvis vi ikke er tydelige her og stiller eleverne opgaver, som kræver beregninger – eller som kræver, at de bruger geometriprogrammet, så oplever eleverne måske ikke, at der er nogen forskel, og de vil heller ikke opdage, at nogle gange kan det bedst betale sig at lave en beregning, mens det andre gange er smartere at tegne i dynamisk geometri og måle der.

Lad os sige, at vi har en mark, som er rektangulær. Den ene side måler 1,2 km og den anden side måler 0,86 km. Arealet af marken kan vi beregne væsentligt hurtigere end vi kan tegne og måle.

Men hvis nu marken har et areal på ca. 1 km², og den ene side måler 1,2 km, men marken er ikke rektangulær, den er firkantet og ingen af siderne er lige lange. Hvordan kan marken da se ud? Her vil en beregning være meningsløs, men opgaven kan

til gengæld løses relativt hurtigt ved at bruge dynamisk geometri og måle et areal. Hvor mange forskellige marker kan vi finde? Arealet er mindre interessant i denne sammenhæng, men det er interessant om elevernes løsninger lever op til alle krav, fx areal og ingen sidelængder der må være det samme. Igen kan man som lærer lave benspænd for eleverne. To sidelængder skal fx være ens. Der skal være en ret vinkel, etc.



I arbejdet med *statistik og sandsynlighed* forventes eleverne at kunne bruge digitale værktøjer til at søge data og kunne udforme spørgeskemaer samt kunne analysere datasæt ved hjælp af digitale værktøjer. Det vil sige, at eleverne skal kunne beregne deskriptorer ved hjælp af digitale værktøjer. Deri ligger i sig selv en bevidsthed om, hvad statistiske deskriptorer viser – og de digitale værktøjer har nogle gange forskellige måder at beregne deskriptorerne på. Derfor kan der være afvigelser fra fx den metode, man bruger, når man beregner en deskriptor, og den deskriptor eksempelvis et regneark finder. Det er en god idé at være bevidst om og eksplicit omkring dette i arbejdet med statistik, så eleverne opnår en erkendelse af, at de digitale værktøjer nogle gange bruger forskellige metoder i statistikens verden.

Eleverne forventes også at kunne foretage simuleringer med digitale værktøjer. I forhold til manuelle, analoge simuleringer, bliver det at simulere digitalt på den ene side en abstraktion – vi kan fx ikke se, at en terning kastes 10 000 gange. På den anden side får vi adgang til langt flere data, end vi kan producere på kort tid, alene. Det giver gode muligheder for, at eleverne kan erfare forskellen på fx 10 simuleringer og 10 000 simuleringer, hvis vi skal kunne udtale os om chance på et generelt plan. Eleverne skal selv på sigt kunne udforme og programmere et regneark eller lignende til at foretage simulering.

3. trinforløb

I 3. trinforløb bygges videre på alt det, der ligger i 1. og 2. trinforløb, og de dele, der allerede har været nævnt, gælder også her.

Modelleringsprocesser

I 3. trinforløb skal eleverne kunne gennemføre og vurdere modelleringsprocesser. I den forbindelse kan digitale værktøjer være uundværlige, fx hvis eleverne vil analysere en valgt model for vækst i forhold til et datasæt. Digital simulering nævnes også som et element, der kan indgå i modelleringsprocesserne.

I arbejdet med regressionsanalyse ligger der gode muligheder i de digitale værktøjer, eksempelvis regneark, CAS og nogle dynamiske geometriprogrammer. Der ligger mange gode diskussioner og refleksioner over, hvor hensigtsmæssig en valgt model er. Er der en begrænset rækkevidde for modellen, fx frem eller tilbage i tiden? Er der parametre, som modellen ikke tager højde for? Hvor godt passer modellen med den udvikling, den skal vise? Det er essentielt, at eleverne lærer at forholde sig kritisk til valgte modeller. De kan opstille fordele og ulemper, eller sammenligne forskelle og ligheder for forskellige modeller. Og det er godt givet ud, at eleverne arbejder med at gøre det systematisk, fx ved at opstille tabeller. De digitale værktøjer bliver i dette arbejde både et teknisk hjælpemiddel, der kan hjælpe med at behandle data, men de bliver også et værktøj til kommunikation, fordi de kan bidrage til at fastholde et overblik og formidle det, eleverne er kommet frem til på baggrund af deres modelleeringsproces.

Hensigtsmæssig inddragelse af digitale værktøjer

I arbejdet med ræsonnementer skal eleverne udvikle en øget bevidsthed om, hvornår it kan inddrages hensigtsmæssigt. Sidder man med en lang algebraisk beregning, kan et CAS værktøj være en fordel at inddrage, men eleverne skal også kunne lave ræsonnementer på baggrund af matematiske definitioner. De skal således kunne skelne mellem, hvornår det er hensigtsmæssigt at måle på en konstruktion, eller beregne, i forhold til, hvornår man kan begrunde noget alene ud fra matematiske definitioner og ad den vej lave sit ræsonnement. Det er rigtig god træning, at eleverne også øver sig på at kunne lave ræsonnementer, hvor de ikke bruger it, men alene ræsonnerer og forklarer på baggrund af den matematiske viden, de har. I afgangsprøverne findes et hav af ræsonnementsopgaver, man kan lade sig inspirere af og dykke ned i, i undervisningen. Disse opgaver kan sikkert igen føre til nye opgaver, eller eleverne kan finde på lignende opgaver til hinanden.

Eleverne skal i dette trinforløb i højere og højere grad mestre at kunne behandle repræsentationer med symbolholdige udtryk, og her spiller CAS en vigtig rolle.

Digitale medier

Eleverne skal også kunne søge og forholde sig kritisk til den information, de finder i digitale medier. Her nævnes digitale medier som noget særskilt fra digitale værktøjer. Kort defineret kan man sige, at digitale medier er de medier, vi kan tilgå elektronisk fra en digital device. Hvorfor skal de nu spille en rolle i matematikundervisningen? I takt med at information digitaliseres, vil det være i digital form, informationen skal søges. Og i udviklingen af elevernes digitale dannelse, er det helt centralt, at de har gode søgestrategier og ved, hvor det kan være givtigt at søge efter en bestemt type information. Men de skal også udvikle kritisk bevidsthed om den information, de søger frem.

Refleksion 7

Det kan derfor være centralt at spørge sig selv og drøfte i fagteamet:

- ★ Hvilke gode strategier kan vi give eleverne, når de søger efter informationer på digitale medier i matematik?
- ★ Og hvilke typer informationer leder man typisk efter i matematik?
- ★ Hvor er det godt at lede efter informationer, som kan anvendes i matematikundervisningen?
- ★ Eller hvor giver det ikke mening?
- ★ Kan man fx finde mere end en kilde?
- ★ Hvilken type kilde er det?
- ★ Hvem er afsender?

Eleverne skal være bevidste om afsender- og modtagerforhold, når de kommunikerer skriftligt og mundtligt i matematik, og uden at det skal udvikle sig til en danskfaglig genrepædagogisk diskussion, kommer vi ikke, som matematiklærere, uden om at skulle forholde os til forskellige genrer, når vi kommunikerer i, om og med matematik? Hvis eleverne skal skrive en argumenterende tekst til en avis, en forklarende tekst til en undersøgelse, en besvarelse på en skriftlig opgave, en definition på et begreb osv. skal de vide, at der er nogle særlige kendetegn ved de forskellige genrer, som de må prøve at ramme. Det kræver igen, at vi udsætter dem for at arbejde med de forskellige genrer løbende i undervisningen.

I arbejdet med *tal* og *algebra* skal eleverne som noget naturligt kunne bruge digitale værktøjer, når de skal udføre beregninger med rationale tal. Her vil mange finde, at CAS-værktøjer er fremragende til formålet. Eleverne skal samtidig være i stand til at kunne vurdere et resultat, som er fremkommet ved hjælp af et digitalt værktøj, ud fra hovedregning. Det er altså helt centralt, at eleverne lærer at spørge sig selv: Kan det passe? når de får et resultat i et digitalt værktøj. Eleverne skal kunne foretage beregninger vedrørende lån, opsparing og privatøkonomi ved hjælp af digitale værktøjer, eksempelvis i regneark. CAS og regneark kan supplere hinanden ganske fint. Hvordan kan de fx kode et regneark, så det kan beregne ud fra en bestemt formel, på samme måde som et CAS-værktøj?

Endelig skal eleverne kunne bruge digitale værktøjer, når drejer sig om at foretage beregninger med irrationale tal. En del CAS-værktøjer har mulighed for at skelne mellem eksakte og numeriske beregninger, og det er en rigtig god måde at udfordre elevernes symbolbehandlings- og repræsentationskompetence på. Vi kan fx skrive 25 eller vi kan skrive 4,47. Men hvilke forskelle er der? Og hvorfor er det nogle gange bedre at skrive det ene end det andet?



Udfordringskompetence og forskellige typer svar

I arbejdet med ligninger, skal eleverne udvikle forskellige strategier til ligningsløsning. De skal kunne bruge inspektion (prøve efter) og bruge grafisk ligningsløsning. Eleverne skal kunne bruge digitale værktøjer, når de skal opstille ligninger. Her vil CAS være et formidabelt værktøj. Eleverne kan opstille en ligning og prøve efter, om den har det forventede resultat i CAS, justere på udtrykket, hvis det ikke faldt ud som ønsket, prøve igen osv.

Hvis vi arbejder med ligninger og inddrager CAS, kan CAS jo relativt enkelt løse enhver ligning. Det kan sætte ligningsløsningen på en prøve, så det er centralt, at vi stiller eleverne nogle opgaver, som udfordrer dem på netop brugen af det digitale værktøj. En opgave kunne være: Skriv mindst 5 ligninger som har løsningen $x = 14$. Her er gode muligheder for at udfordre eleverne: Hvis der nu skal være x på begge sider af lighedstegnet? Hvis du skal bruge subtraktion i ligningen? Hvis du skal have parenteser med? Osv.

CAS-værktøjet bliver her en støtte til at undersøge de forskellige ligninger. Opgaven kalder også på en udfordringskompetence hos den enkelte elev i forhold til at svare, så kvaliteten af det svar, den enkelte elev giver, er så godt, som det kan blive. Pernille Pind opererer med sine tre typer af svar: Det almindelige, det vanskelige og det smarte, i bogen *Åben og undersøgende matematik*.

I arbejdet med formler og algebraiske udtryk arbejder eleverne videre med sammenhænge mellem geometri og algebra, og de skal opleve, hvordan algebraiske

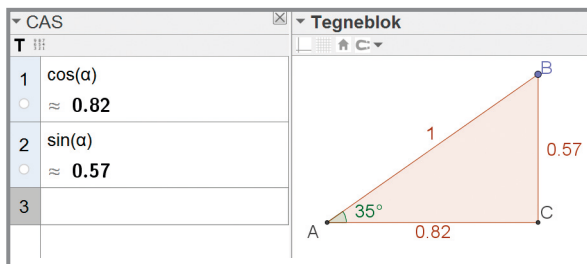
udtryk eller formler kan bruges til at løse problemer fra hverdagen. Der findes forskellige formler for kondital. Nogle af formlerne er ikke helt enkle, men med digitale værktøjer kan eleverne alligevel få adgang til at foretage beregninger på ting fra hverdagen, som kan være spændende for dem at undersøge. Eleverne skal selv kunne omskrive formler og sammenligne algebraiske udtryk. I den forbindelse kan CAS være en støtte til at sammenligne egne omskrivninger med en omskrivning foretaget i et CAS-værktøj eller til at beregne om et resultat passer med en omskrivning, ved at beregne i CAS.

I arbejdet med funktioner vil eleverne i 3. trinforløb skulle arbejde med både lineære og ikke-lineære sammenhænge. Det at tegne grafer for funktioner, beregne funktionsværdier, sammenligne funktionsudtryk er helt anderledes håndgribeligt for eleverne, når de har adgang til digitale værktøjer. Både CAS, regneark og dynamisk geometri kan understøtte arbejdet med funktioner på dette trin på forskellig vis. Det er klart, at det at tegne eksempelvis en andengradsfunktion i et koordinatsystem i hånden på baggrund af en funktionsforskrift og måske en tabel, er en øvelse, som vi ikke skal bruge ret megen tid på. Tiden må hellere bruges på at tegne i dynamisk geometriprogram eller i et CAS-værktøj, som kan tegne funktioner, og derefter sammenligne grafisk billede med forskrift for forskellige funktioner for på den måde at få en forståelse af de forskellige typer af funktioner.

Geometri og trigonometri

Arbejdet med geometri i 3. trinforløb er gennemsyret af, at digitale værktøjer indgår og understøtter elevernes begrebsdannelse og arbejde i stort og småt, fx i forbindelse med tegning/konstruktion. Nogle elever bliver så glade for præcisionen i at tegne i et geometriprogram, at de altid tegner alt i geometriprogrammet. Eleverne skal udfordres på denne følelse ved at møde opgaver, hvor de eksempelvis skal tegne skitser med mål, der bare er nogle blyantstreger med påskrevne mål.

Digitale værktøjer nævnes specifikt i arbejdet med trigonometri. Jeg vil gerne bemærke her, hvordan dynamisk geometri og CAS kan understøtte elevernes begrebsdannelse af trigonometri i de retvinklede trekanter. I et dynamisk geometriprogram kan man konstruere en enhedstrekan, hvor hypotenusen er 1, og det derved er muligt at måle længden på kateterne som henholdsvis $\sin(A)$ og $\cos(A)$. På den måde bliver værdierne for sinus, cosinus og tangens ikke bare en kuriositet, som lommeregneren finder på, fordi vi beder den om noget.



Det er muligt at gøre noget abstrakt meget konkret og i den grad få visualiseret sammenhængene mellem geometri og algebra ved at lade de digitale værktøjer komme i spil samtidig.

Eleverne skal fortsat kunne benytte digitale værktøjer, når de skal beregne på datasæt i statistik og lave grafiske fremstillinger af data, og de skal kunne bruge digitale værktøjer, når de undersøger sammenhænge mellem data fra virkeligheden/omverdenen.

Endelig skal eleverne kunne benytte simulering i arbejdet med sandsynlighed. Det kræver et overblik af eleverne, hvis de selv skal kunne opsætte og programmere eksempelvis et regneark til simulering, men det er samtidig også vigtigt, at læreren udfordrer simuleringen, så det ikke altid handler om simulering af terningekast eller mønter, men at eleverne selv kan udføre simuleringer på selvopfundne spil, data som følge af en valgt model osv.

Gratis værktøjer eller betaling?

Indtil nu har jeg i artiklen kun forholdt mig til, hvilke krav, der stilles i undervisningen. I det følgende vil jeg kort berøre de udfordringer, der kan være i valget af værktøj. Skal man vælge gratis værktøjer, når man bruger digitale værktøjer? Får man mere for pengene, hvis man vælger et betalingsværktøj? Har man overhovedet et valg? Jeg vil gerne understrege, at jeg i det følgende ikke forholder mig til didaktiserede læremidler som de portaler, online materialer med videre som skolerne køber til undervisningsbrug, men at jeg alene forholder mig til de digitale værktøjer, jeg har omtalt i artiklen.

Der kan være meget, som spiller ind, når man som matematiklærer skal vælge digitale værktøjer til undervisningen. Ofte spiller økonomi en rolle, så mange lærere er afhængige af at kunne bruge de gratisværktøjer, der er til rådighed. Måske har kommunen licenser, som de enkelte fagteams slet ikke er klar over? Det kan være en god ide at undersøge lokalt, hvad kommunen stiller til rådighed, når det kommer til regneark, CAS og dynamisk geometri.

Refleksion 8

★ Hvilke digitale værktøjer har du til rådighed på din skole i matematik?

Skriv en liste over de værktøjer, du har adgang til med dine elever, og noter evt. om de er gratis værktøjer eller betalingsværktøjer. Bemærk, at du udelukkende skal fokusere på værktøjer, ikke på digitale læremidler/undervisningsmaterialer.



Nogle gange, som med dynamisk geometri, findes der glimrende gratis værktøjer, som kan bruges platformsuafhængigt på alle devices. Pt. er GeoGebra et godt bud. Men de, som har fulgt GeoGebra de seneste år, vil også vide, at programmet eller værktøj har været under konstant udvikling, og for bare få år siden var det ikke nær så platformsuafhængigt, som det er i dag. GeoGebra rummer pt. dynamisk geometri, et simpelt regneark, CAS og 3D-tegning. Men det har nogle udfordringer, når det drejer sig om kommunikation. Det er ikke et kommunikationsværktøj, så der må det spille sammen med andre værktøjer, fx tekstbehandling. Det er ikke alle, som finder, at GeoGebra er det bedste dynamiske geometriprogram på markedet. Der er ikke krav om et bestemt program, så det står underviseren frit for at vælge et andet, men man er forpligtet til at bruge dynamisk geometri.

Når det kommer til regneark findes der flere alternativer til Excel for de skoler, som ikke har Office pakken til rådighed. Det kan være Libre Office, Open Office eller Google Sheets/Regneark. Hvis eleverne har deres egen device med, kan det ydermere være forskelligt fra device til device, hvordan funktionaliteterne er i de enkelte regnearksprogrammer. Det er et vilkår, som er kommet for at blive i undervisningen. Der er dog store ligheder i programmerne, så min erfaring er, at eleverne som regel finder en løsning, og der er megen god hjælp at hente på YouTube. Det kan anbefales, at man på årgangen eller i afdelingen/trinnet uddanner nogle eksperter blandt eleverne, som kan hjælpe andre, hvis der er brug for støtte til, hvordan man laver et stolpediagram, justerer på et budget, laver en simulering osv. Eller eleverne kan lave videovejledninger til hinanden, så skolen får en god resurse på den måde. Eleverne kan hjælpe hinanden, så læreren ikke behøver være teknisk ekspert i alle værktøjer hele tiden. Efterhånden som programmerne ændrer sig, kan man lade nye elever lave nye vejledninger.

I forhold til CAS er min oplevelse, at markedet er endnu mere broget end med dynamisk geometri og regneark. Der er stor forskel på de forskellige CAS-værktøjer, og nogle værktøjer befinder sig udelukkende på et algebra-beregnende niveau, mens andre CAS-værktøjer har mulighed for kommunikation og kan implementere andre værktøjer og dermed kan have både regneark og dynamisk geometri i sig til en vis grad. Men der er endnu stor forskel på hvilken device man har, og om skolen har købt et digitalt værktøj, eller om man skal bruge gratis værktøjer. Hvis alt skal køre i skyen, kan nogle af de CAS-værktøjer, der har været på markedet, være udfordret fordi de kører på en teknologi, som skal downloades og installeres. Derfor oplever jeg, at man nogle gange er nødt til at bruge flere værktøjer alt efter opgavens karakter. Det kan generelt være en god idé at afprøve forskellige CAS-værktøjer i et prøveabonnement, så man kan blive klogere på, hvad der fungerer. Og hvis skolens økonomi er en begrænsende faktor, må man eventuelt se på, om der skal omprioriteres i måden, resurserne skal bruges på, eller om man må finde brugbare løsninger ved at bruge forskellige værktøjer sammen. Det kan for eksempel være et CAS-værktøj, som kan foretage beregninger knyttet sammen med tekstbehandling, så man kan have kommunikationen på skrift alligevel. Jeg ser mange kreative lærere, som alligevel finder gode og kreative løsninger i deres brug af CAS.

Hvis vi kigger på produktionsværktøjerne oplever jeg, at rigtig mange skoler har adgang til Skoletube og kan bruge den som platform, og at der desuden ligger mange gratis værktøjer ude, som man kan bruge enten i en Light-udgave med begrænsede funktionaliteter og med mulighed for at købe adgang til en Premium udgave eller fuldt funktionsdygtige gratis produktionsværktøjer. Det betyder dog ikke, at der ikke kan findes ét fantastisk værktøj, som skolen med fordel kunne investere i. Hvis man er iPad-skole, kunne det være en god investering at have iMovie på alle iPads eller Explain Everything, men man kan godt lave video og videoforklaring uden de to apps. Det hele er et spørgsmål om at finde egnede løsninger.

Jeg tror, at vi fremover, når fagteams skal drøfte nyindkøb, skal huske at drøfte de digitale værktøjer på samme måde, som når vi drøfter analoge eller digitale undervisningsmaterialer. Ikke sådan, at en bestemt procentdel af budgettet skal øremærkes det ene eller det andet, men så vi løbende får vurderet, om vi som skoler er funktionsdygtige, også når det kommer til digitale værktøjer. Og vi skal være gode til at se på de læremidler, vi bruger, som måske ikke er af nyeste dato, men som derfor stadig kan være rigtig gode læremidler. Vi skal samtidig undersøge, hvordan vi kan supplere dem eller vinkle opgaver og undersøgelser, så vi alligevel inddrager digitale værktøjer hensigtsmæssigt, selvom det ikke står direkte i undervisningsmaterialet. Ofte kan det løses med små justeringer. Hele opgaver kan måske løses direkte i et digitalt værktøj i stedet for i bogen eller i et hæfte. Det behøver ikke betyde, at alt skal kasseres og nyt skal købes, jeg mener snarere, at det i bund og grund handler

om den tilgang, vi har til undervisningen, og den måde vi vinkler indholdet i faget på. Vi skal også i fagteamet være gode til at hjælpe og støtte hinanden, når vi skal forholde os til nye programmer eller teknologier, som skal i spil i undervisningen. Vi kan investere tid i at blive dygtige til at bruge et givent program, som måske ændrer udseende, udgår eller andet, som gør, at vi må investere ny tid i at sætte os ind i et andet program. De digitale værktøjer, vi bruger i undervisningen ændrer sig, ligesom bogsystemerne og afgangsprøverne også ændrer sig over tid. Hvordan kan vi viden dele i det lokale fagteam? Hvordan kan vi trække på hinandens gode erfaringer? Hvordan kan vi hjælpe alle godt i gang?

Til refleksion

I det følgende har jeg trukket nogle refleksionsspørgsmål ud til drøftelse i fagteamet eller med interesserede fagkolleger.

Hvis man dykker ned i alle de formelle tekster og mål, som er lovstof for matematikfaget i grundskolen, vil man se, at digitale værktøjer står nævnt en del steder. Jeg tænker, at et interessant spørgsmål for en matematiklærer, som gerne vil have en drøftelse i fagteamet kunne være:

Refleksion 9

- ★ Hvor står it nævnt direkte og indirekte i Fælles Mål og i læseplanen?
Gå på jagt med overstregningstuschen og find de konkrete steder it nævnes. Vælg så en anden farve og gå på jagt efter de steder, hvor I tænker det står indirekte, så det alligevel bliver svært at komme uden om it, når man vil undervise ud fra det, der står. Sammenlign jeres bud.
- ★ Hvilke forskelle og ligheder har I?
- ★ Giver det anledning til at gentænke den måde, I normalt ville gribe et fagligt område an på?

Jeg vil også gerne sætte gang i en lille helt lavpraktisk øvelse.

Jeg omtaler bl.a., at det at udfordre eleverne til selv at skulle danne deres egne indre billeder i forbindelse med matematikken kan være en god øvelse, og jeg mener, at lydoptagelser kan være rigtig gode til formålet.

Refleksion 10

- ★ Design en aktivitet, som inddrager elevernes produktion af lydoptagelser, hvor de ved hjælp af lydoptagelserne udfordres til at danne deres egne indre billeder/ repræsentationer af det faglige, der er i spil. Det kunne være til tal og algebra, men det kunne også være til geometri og måling eller statistik og sandsynlighed.
- ★ Kan I designe en aktivitet til indskoling? En til mellemtrin? En til udskoling?

Prøv en af jeres aktiviteter af i praksis!

Jeg har i artiklen trukket læseren godt og grundigt rundt i mål og læseplan. Men her vil jeg til slut gerne opfordre til, at man en gang imellem stopper op og drøfter med hinanden:

Refleksion 11

- ★ Hvordan er vores eget overblik pt. over den inddragelse, der løbende skal ske af digitale værktøjer i matematikundervisningen i de klassetrin, vi underviser på?
- ★ Er der områder, vi skal have kigget nærmere på?
- ★ Er der værktøjer, vi i fællesskab skal blive klogere på?
- ★ Hvordan kan vi sætte gang i det?
- ★ Lav en plan.

Litteratur

Tall, David; Vinner, Shlomo (May 1981), *Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity*, Educational Studies in Mathematics, 12 (2): 151–169, doi:10.1007/BF00305619

Fælles Mål
<http://www.emu.dk/sites/default/files/Matematik%20-%20januar%202016.pdf>

Læseplanen
http://www.emu.dk/sites/default/files/L%C3%A6seplan%20for%20faget%20matematik_0.pdf

Undervisningsvejledningen
<http://www.emu.dk/modul/vejledning-faget-matematik>