Abstract

Hvis vi skal overbevise elever om, at matematik er en aktiv levende disciplin, kan vi lade dem 'lege med' matematik, herunder eksperimentere med matematik. Gennem dette kan de erfare, at matematik ikke bare består af nogle 'formler', som de gamle grækere har fundet på – men at det er et fag, der i den grad lever i dag.

I artiklen vil jeg komme ind på, hvad man kan gøre i matematikundervisningen for at tilrettelægge meningsfyldte eksperimenter, der bibringer eleverne såvel oplevelser som væsentlige matematiske færdigheder.

Det vil gøre eleverne åbne for læring, men det kræver at lærerne har et syn på fag og læring, der bl.a. afspejler følgende:

1. At lære matematik er at skabe matematik.
2. Matematisk kundskab kan kun opnås ved at arbejde med matematik.
3. Matematik er den virksomhed, der foregår i vore hjerner, når vi arbejder med matematiske problemstillinger.

Forfatter

Mette-Maria Vedelsby

Mag.scient og cand.mag, lektor emerita på læreruddannelsen på University College Sjælland, ekstern lektor på UCSJ, hvor hun underviser på matematikvejlederuddannelsen, er desuden konsulent for Forlaget MATEMATIK.

Udgivelser

Har i forbindelse med forskellige forskningsprojekter udgivet rapporter,
er forfatter og medforfatter til mange bøger og artikler, specielt om brug af it
i gymnasiets-, læreruddannelsens- og folkeskolens matematikundervisning,
er desuden medforfatter til *Matematik for lærere Grundbog 3* (Gyldendals forlag).

Kapitel 2

Eksperimentel matematik

Kan det bruges som didaktisk princip for tilrettelæggelse af undervisningen?

Hvorfor hører den eksperimentelle matematik hjemme i matematikundervisningen – *Reelle krav*?

Matematikken kan præsenteres på to forskellige måder, som de to sider af en mønt. Den ene side er den logisk deduktive side med matematiske sætninger og deres – helst analytiske – beviser. Det er den side, vi ser fremstillet i matematisk faglitteratur. Den anden side er den, der praktiseres og udforskes af aktive matematikere, og som oftest bygger på en induktiv og eksperimenterende tilgang til matematik.

De matematiske sætninger, som vi får dem serveret i lærebøger, er jo ikke bare nogle, matematikere har rystet ud af ærmet. De er blevet til ved at matematikeren prøvet sig frem, eksperimenteret og derved opdaget matematiske sammenhænge, som ind imellem er blevet så overbevisende, at de er værd at bevise.

Det sidste er ikke altid ligetil, tænk fx på Fermats sidste sætning, der var 358 år om at blive bevist. (Den blev bevist i 1995). Måske beviste Fermat den selv, men han skrev ikke beviset udførligt ned.

Ved at præsentere eleverne for arbejdsmetoden *Eksperimentel matematik* kan man få dem til at nærme sig matematikerens arbejdsmetode. Eleverne lærer at gætte kvalificeret om matematik. Nutidige matematikere bruger i høj grad computerprogrammer som værktøj til at gætte, og det er derfor den eksperimentelle matematik er interessant i forbindelse med brug af it i matematikundervisningen.

I undervisningen kan matematiske eksperimenter udført ved brug af computerprogrammer bruges til at visualisere og sandsynliggøre matematiske sammenhænge. Man kan afprøve hypoteser, og man kan lettere opnå en intuitiv indsigt. Men naturligvis er eksperimenterne ikke nok, der skal beviser til.

Jeg bruger begrebet eksperimentel matematik som didaktisk princip på to måder, der begge tager udgangspunkt i undersøgende aktiviteter. I det ene tilfælde eksperimenterer man sig frem til sammenhænge fx ved brug af et dynamisk computerprogram, i det andet tilfælde introduceres matematiske emner og begreber via konkrete eksperimenter, der kan danne udgangspunkt for forståelsen af de tilsvarende abstrakte matematiske begreber og emner. Her bruges ofte et computerprogram til at bearbejde resultater fra eksperimenterne og til generalisering af disse.

I denne artikel vil vi se på forskellige eksempler, hvor vi bruger computerprogrammer til at eksperimentere os frem til forståelse af matematiske begreber og sammenhænge. Desuden vil vi se på eksempler, hvor vi tager udgangspunkt i konkrete "fysiske" eksperimenter, og så evt. bruger computerprogrammer til at bearbejde og generalisere resultaterne.

Eleverne får, gennem en sådan arbejdsmetode, mulighed for blandt andet at udvikle deres modelleringskompetence, repræsentationskompetence, kommunikationskompetence og hjælpemiddelkompetence.

Desuden er der basis for, at elevernes kreativitet og fantasi udvikles.

Metoden giver også eleverne mulighed for at udvikle visuel tænkning. Det vil jeg komme tilbage til i et senere afsnit.

Man skal som lærer sikre sig, at de eksperimentelle forløb befinder sig indenfor elevernes zone for nærmeste udvikling (ref. Lev Vygotsky), så eleverne har mulighed for selvstændigt eller i grupper at overtage problemerne og gå i gang med undersøgelserne.

Som lærer skal man desuden være opmærksom på, at det kræver et trygt læringsmiljø og et læringssyn, der afspejler holdningen: *At lære matematik* er *at skabe matematik*. Og endelig skal læreren selvfølgelig være fortrolig med skolens computersoftware.

Formelle krav

Begrebet *Eksperimentel matematik* er ikke direkte anvendt i fagformålet for matematik, men både i stk.1 og stk. 2 kunne det have været tilføjet:

Eleverne skal i faget matematik udvikle matematiske kompetencer og opnå færdigheder og viden, således at de kan begå sig hensigtsmæssigt i matematikrelaterede situationer i deres aktuelle og fremtidige daglig-, fritids-, uddannelses-, arbejds- og samfundsliv. *Dette kan fx opnås ved brug af eksperimentel matematik som arbejdsmetode* (dét med kursiv er min tilføjelse).

Stk. 2. Elevernes læring skal baseres på, at de selvstændigt og gennem dialog og samarbejde med andre kan erfare, at matematik fordrer og fremmer kreativ virksomhed, og at matematik rummer redskaber til problemløsning, argumentation og kommunikation. *Dette kan udvikles i et læringsrum, hvor eksperimentel matematik indgår.*

I afsnittet om It og medier, står der: "Elevernes kreativitet udvikles bl.a. ved undersøgende arbejde, som er en central arbejdsmåde i læring af matematik, samt i forbindelse med åbne problemstillinger indenfor modellering. Undervisningen skal have fokus på at udvikle elevernes kreative kompetencer bl.a. igennem arbejdet med ræsonnementer, hvor eleverne skal udvikle og efterprøve hypoteser."

I undervisningsvejledningen under It og medier står der mange ting, der antyder at brug af den eksperimentelle undervisningsform er god, blandt andet står der:

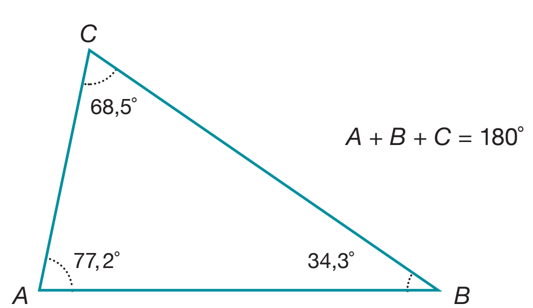
"For det andet kan it i en række tilfælde støtte elevernes forståelse af faglige begreber og sammenhænge – især fordi en række digitale værktøjer giver eleverne mulighed for at visualisere, undersøge og eksperimentere med disse matematiske begreber og sammenhænge, fx ved at gentage en beregning, tegning eller lignende mange gange eller ved at simulere et stokastisk eksperiment et stort antal gange. Eleverne kan på den måde meget hurtigt afprøve rigtig mange eksempler og derudfra opstille hypoteser om generelle sammenhænge."

Eksempler på, at man eksperimenterer sig frem til forståelse af et matematisk begreb eller en matematisk sammenhæng

1. Eksempler fra geometrien

A) *Hvad gælder der om vinkelsummen i en trekant, firkant …, findes der en generel formel for vinkelsummen i en n-kant? (Mellemtrin – sluttrin)*

Disse spørgsmål undersøges lettest ved brug af et dynamisk geometri-program. Man kan nøjes med at stille spørgsmålene ovenfor, men man kan også hjælpe eleven lidt på vej, fx som foreslået nedenfor.
Man beder eleven konstruere en tilfældig trekant, derefter skal eleven måle trekantens vinkler og summen af disse. Sluttelig trækkes i et af trekantens hjørner. Det er let for eleverne, at blive overbeviste om at vinkelsummen i en trekant altid er 180°.

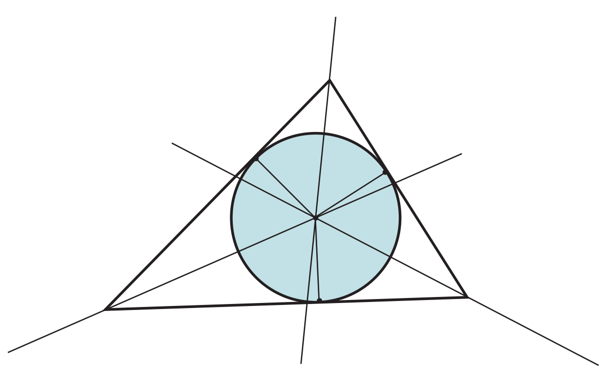


Man kan så ydermere spørge eleverne, hvorfor denne regel gælder og lade dem selv finde løsningen på dette spørgsmål.
Derefter kan eleverne tage hul på vinkelsummen i en firkant, femkant, …
Gennem disse eksperimenter kan eleverne måske slutte sig til en generel formel for vinkelsummen i en n-kant.
Fordelen ved denne metode, fremfor at eleverne konstruerer trekanterne med passer og lineal, er indlysende. Vinkelsummen bliver præcis 180° for alle de trekanter de måler på.

B) Eksperimenter med linjer i en trekant
(Mellemtrin – sluttrin)

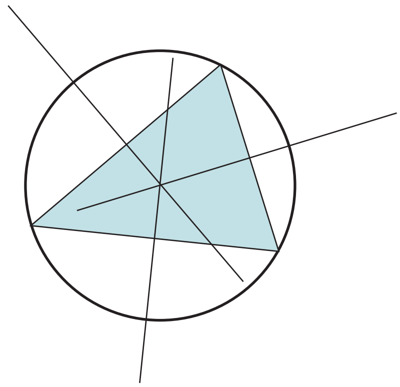
Her følger to eksempler. Man kan give færre oplysninger
end dem, der er givet nedenfor, afhængigt af den enkelte elevs niveau.

a) Vinkelhalveringslinjer i en trekant
Målet er, at eleverne erfarer, at vinkelhalveringslinjerne i en vilkårlig trekant altid har et fællespunkt, og at dette er centrum for trekantens indskrevne cirkel.
Konstruér en trekant og dens tre vinkelhalveringslinjer i et dynamisk geometriprogram. Træk trekanten rundt i dens ene hjørne. Observer hvad der sker. Konstruér vinkelhalveringslinjernes skæringspunkt. Mål afstanden fra dette skæringspunkt til trekantens tre sider.
Konstruér trekantens indskrevne cirkel og forklar, hvorfor vinkelhalveringslinjernes skæringspunkt er centrum for den indskrevne cirkel.



b) Midtnormalerne i en trekant
Målet er, at eleverne erfarer, at midtnormalerne i en trekant altid har et punkt fælles, og at dette punkt er centrum for trekantens omskrevne cirkel.
Konstruér en trekant og dens tre midtnormaler. Træk trekanten rundt i dens ene hjørne og observer hvad der sker. Konstruer midtnormalernes skæringspunkt og

mål afstanden fra dette til de tre vinkelspidser. Konstruér trekantens omskrevne cirkel og forklar, hvorfor dens centrum må ligge i midtnormalernes skæringspunkt.

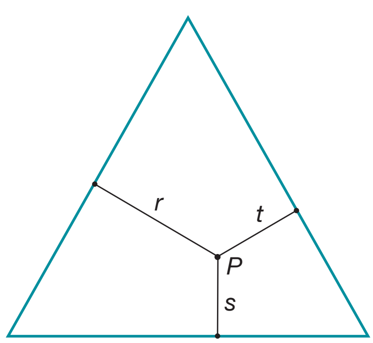


C) *Vivianis sætning*
(Sluttrin)

Konstruér en ligesidet trekant og et vilkårligt punkt P inde i trekanten ved brug af et dynamisk geometriprogram. Bestem summen af de tre (vinkelrette) afstande fra P til hver af trekantens sider.

- Hvad ser man, hvis man trækker i P?
- Hvad sker der, hvis P ligger på en af trekantens sider?
- Hvad sker der, hvis P ligger i en af trekantens vinkelspidser?
- Hvad sker der, hvis P ligger udenfor trekanten?
- Har det noget betydning for resultatet, at trekanten er ligesidet ?

I forbindelse med dette problem kan man efter behov give forskellige hints.



r = 3,9 cm
s = 2,15 cm
t = 2,47 cm
$r + s + t$ = 8,52 cm

Lav den samme undersøgelse, hvis den ligesidede trekant erstattes med et kvadrat og derefter med en regulær femkant.

2. Eksempler med Funktionsbegrebet

I dette afsnit vises to eksempler, hvor funktionsbegrebet anvendes.

A) Rette linjers beliggenhed i koordinatsystemet.
(Sluttrin)

Efter at have arbejdet med konkrete eksempler på førstegradsfunktioner i et dynamisk computerprogram indtastes en funktion $y = a \cdot x$. Samtidigt introduceres en skyder for den variable a i et passende interval, og grafen for førstegradsfunktionen tegnes. Ved at variere på a via skyderen har eleven mulighed for at gøre sig erfaringer med betydningen af hældningskoefficienten a (samt hvorfor den kaldes en hældningskoefficient).
Når man har forstået dette begreb, indskrives funktionen $y = 2x + b$, og en skyder for b konstrueres. Grafen tegnes, og der varieres på b. Herigennem kan eleverne få en forståelse for betydningen af b i førstegradsfunktionen.
Tilsvarende kan man arbejde med andengradsfunktionen …
Efter at have arbejde på denne måde udtalte en pige fra 10-klasse:
"Nu ser jeg funktioner grafisk. Det første jeg gør, når jeg møder et problem, er at visualisere grafen: hældning og skæringspunkt".

B) Modelleringsproblemer
(Mellemtrin – sluttrin)

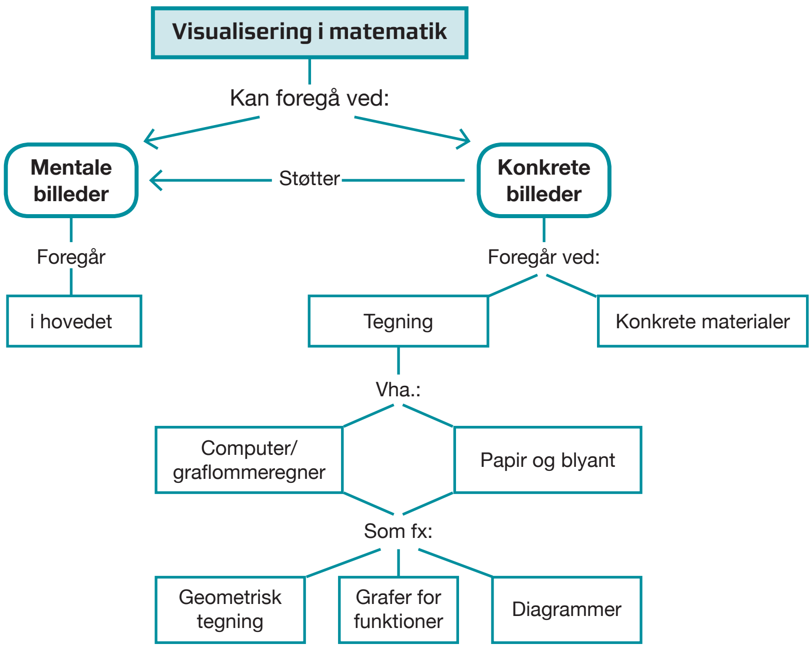
a) Simpel opsparing:
Peter lægger hver uge 20 kr. af sine lommepenge i en sparebøsse. Efter hvor mange uger har han 200 kr.? Opstil en matematisk model for Peters opsparing, der gælder for alle uger. Modellen skal illustreres både ved en funktionsforskrift og ved en tabel.
Man kan, om nødvendigt, give forskellige hint til løsning af problemet.

For uddybning af det matematiske modelbegreb se evt. reference 1A

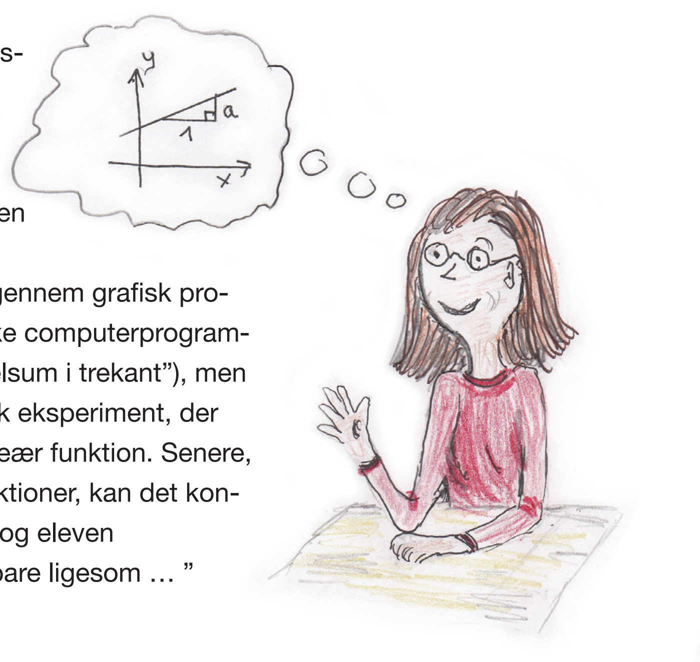
Visuel tænkning

Til beskrivelse af matematiske begreber og problemstillinger bruger vi forskellige repræsentationer, som fx tekst, formel, tabel og forskellige former for billeder (grafer, tegninger, …). Det er i forbindelse med billedrepræsentationer at visualiseringen bliver aktuel. Eleverne skal lære at danne billeder, der understøtter begrebsdannelsen.
– man skal kunne *se det for sig*.

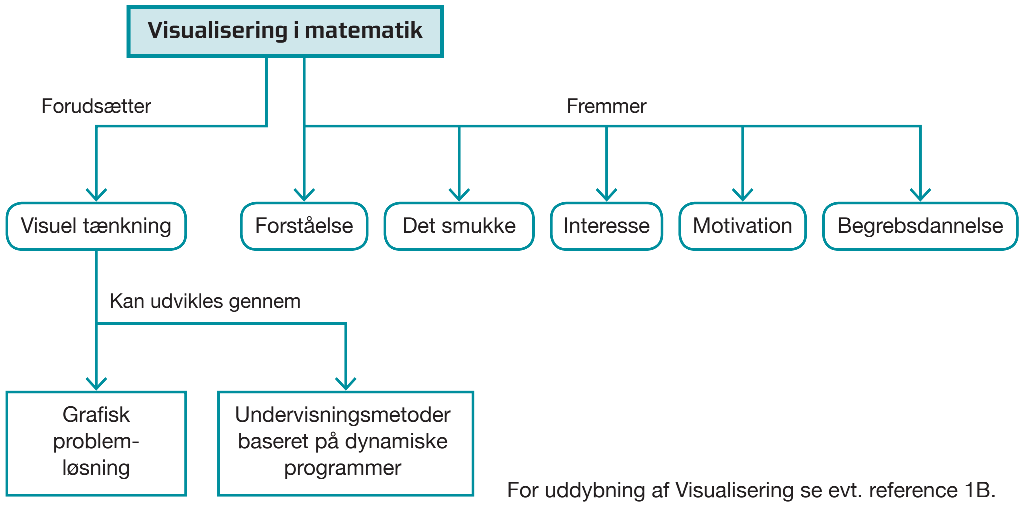
Vi er interesserede i, at eleverne udvikler evnerne til at tegne passende billeder, der repræsenterer et begreb eller et problem, samt at de lagrer disse billeder mentalt, så de kan fremkaldes, når de senere arbejder med de samme problemtyper.
Billeder er vitale for dannelsen af mentale repræsentationer, der er væsentlige for forståelsen af matematiske begreber og sammenhænge. Visualisering er et middel til forståelse.



Hvis man fx siger ordet hældnings-koefficient, så ser man for sig en ret linje i et koordinatsystem. Eller hvis man hører ordet parabel, så dukker der et billede af en parabel op inde i ens hoved.



Visuel tænkning kan udvikles gennem grafisk problemløsning og brug af dynamiske computerprogrammer (se fx bestemmelse af "vinkelsum i trekant"), men også ved at lave et konkret, fysisk eksperiment, der viser os egenskaberne ved en lineær funktion. Senere, når eleven møder tilsvarende funktioner, kan det konkrete eksperiment trækkes frem, og eleven kan genkalde sig det: "Det er jo bare ligesom … "



For uddybning af Visualisering se evt. reference 1B.

Begreber og sammenhænge introduceret via et konkret fysisk eksperiment

A) Sammenhæng mellem masse og rumfang af væske

Hensigten med dette eksperiment er at eleven skal få erfaring med begrebet lineær funktion, herunder proportionalitet, og danne et mentalt billede af begrebet.

Til dette eksperiment skal der bruges et måleglas og en vægt. Man hælder lidt efter lidt en væske (fx mælk) i måleglasset og foretager sammenhørende målinger af rumfanget af væskemængde i måleglas og massen af væsken. Resultaterne indtegnes i et koordinatsystem. Nu afhænger det så af, om eleven har massen af måleglasset med i resultaterne eller har fratrukket den, om vi får en lineær sammenhæng med massen af måleglas som skæring med andenaksen eller en proportionalitet.

B) Det perfekte fotografi

Hensigten med dette eksperiment er, at eleverne skal få erfaringer med begrebet ligedannethed – men eksperimentet kan også være et eksempel på en lineær sammenhæng.

En fotograf ønsker at åbne en forretning, hvor folk kan komme ind og tage et billede af sig selv, uden at nogen står og kigger.

Han har et kamera, der står på et stativ, og det kan skrues op og ned. Fotografen har brug for en måde, hvorpå han kan fortælle kunderne, i hvilken afstand (L) de skal placere kameraet i forhold til det, de skal fotografere. Hvis de fx vil fotografere sig selv i fuld højde, afhænger afstanden af deres højde, og hvis de vil lave et portræt, afhænger afstanden af højden på deres hoved.

Fotografen ønsker altså at angive en metode, der gør kunden i stand til at placere kameraet, når han eller hun har målt højden (h) af det, der ønskes fotograferet. Bemærk, at kameraet har en fast åbningsvinkel A.

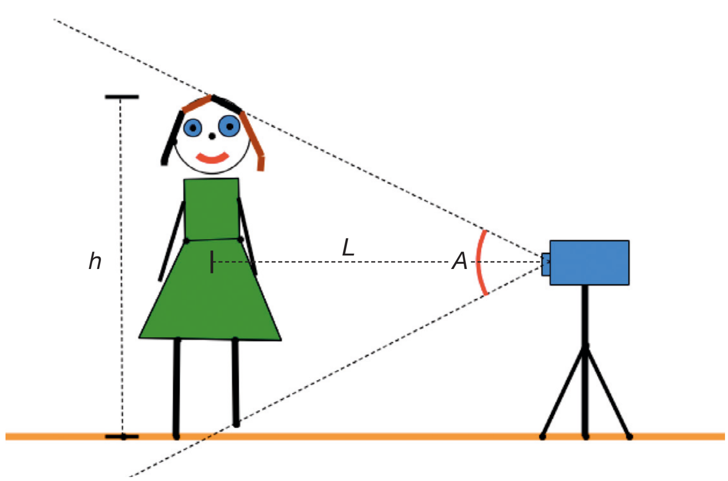
Opgaven er at beskrive en metode for fotografen, så han skriftligt kan give de nødvendige informationer til sine kunder. Resultatet kan afleveres som en graf, en tegning, en tabel eller en ligning.

Eksperiment:

For at indsamle de nødvendige data til at finde en måde at forudsige afstanden, hvis højden af genstanden er kendt, kan du som en primitiv model af fotografens kamera bruge paprøret fra en toiletrulle eller en køkkenrulle. Du skal også bruge et målebånd. Det anvendte rørs åbningsvinkel antages at være den samme som kameraets. Du kan eventuelt eksperimentere med flere forskellige 'kameratyper'. Hvordan vil du anbefale fotografen at give kunderne den skriftlige brugsanvisning til anvendelsen af fotografiapparatet – som en tabel, en graf eller en ligning?

Nogle elever kan have gavn af et hjælpeark som nedenstående:

Foretag mindst 5 forskellige målinger af sammenhørende værdier af h og L og opstil en tabel over måleresultaterne. Tegn ud fra tabellen en graf, og opstil en ligning for sammenhængen mellem afstanden L og højden h.
Tag med en ny værdi for h endnu et 'fotografi'. Sæt de målte værdier for L og h ind i din ligning for at kontrollere, om den passer.
Du kan eventuelt prøve med forskellige rørtyper.



C) Afkøling af te

Hensigten med dette eksperiment er, at eleven skal få konkrete erfaringer med en modelleringsproces samt et konkret eksempel på en aftagende eksponentialfunktion.

- Man skal bruge et termometer og en kop te.
- Forestil dig, at du har hældt kogende vand fra en el-kedel over et tebrev i din kop og besvar spørgsmålene nedenfor:

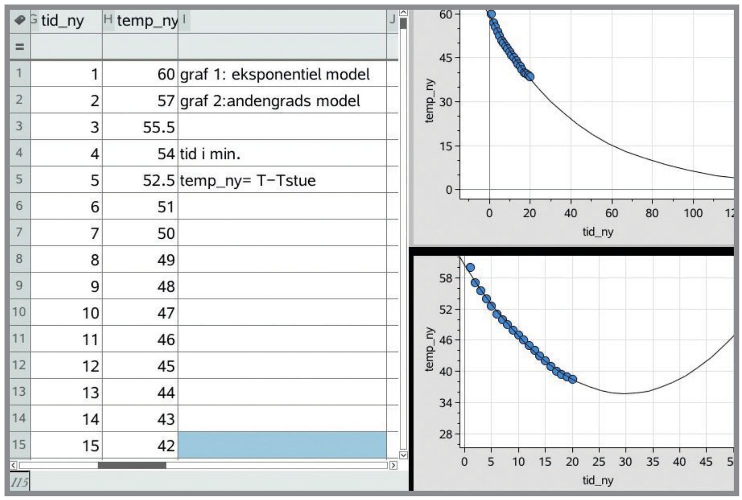
Hvor lang tid skal du mon vente, før teen er drikkeklar?

- Hvor hurtigt afkøles kogende vand?
- Hvilken betydning har koppens form mon for afkølingstempoet?
- Hvilken temperatur tror du, at folk foretrækker, at deres te skal have, når de begynder at drikke af den? Og hvornår er den mon for kold?
- Mon min termokande kan holde teen inden for dette temperaturinterval en hel skoledag?

Dine svar på spørgsmålene ovenfor bliver rene hypoteser. Så du bliver vist nødt til at lave nogle målinger for at få bekræftet eller afkræftet dine svar. Du kan fx måle temperaturen af væsken hvert minut.

Først afbildes temperaturen som funktion af tiden, og man erfarer ud fra grafen, at væskens temperatur nærmer sig stuetemperaturen. Derfor får man den gode idé at afbilde væsketemperatur minus stuetemperatur som funktion af tiden, hvilket giver grafen (næste side).

Vi udfører dels kvadratisk regression og dels eksponentiel regression på resultaterne. Måleresultaterne passer for så vidt på begge funktioner, men man kan indse, at teens temperatur jo ikke kan stige igen, så afkølingskurven kan ikke beskrives ved en andengradsfunktion, hvorimod den aftagende eksponentialfunktion er en god model. Resultaterne kunne se således ud:



CAS-eksempel

Efter at have udført og arbejdet med dette eksperiment kan eleverne have dannet sig et mentalt billede af egenskaber for en aftagende eksponentialfunktion. Det kan de bruge, når de senere skal beskæftige sig med eksponentialfunktionen på en mere abstrakt måde.

Hvorfor er eksperimentel matematik god som arbejdsmetode?

Arbejdsmetoden *Eksperimentel matematik* fremmer elevernes kreativitet og fantasi, og giver dem et lager af konkrete eksempler, som de senere kan hænge de abstrakte begrebet op på. Hvis de fx har lavet eksperimentet med afkøling af te, og de senere støder på begrebet eksponentiel vækst, kan de tænke: “Det var ligesom, da vi afkølede te”.

Matematiktimerne bliver sjovere og eleverne arbejder sammen og diskuterer, det vil sige, at kommunikationskompetencen har gode vilkår for at udvikles.

Da eleverne ofte kommer til at opstille forskellige matematiske modeller for det, de ser, er der også mulighed for, at deres modelleringskompetence udvikles. Oftest bruges computeren som nyttig assistent, hvilket indebærer, at deres hjælpemiddelkompetence også kan udvikles.

Der er gode muligheder for differentiering, da læreren undervejs kan give eleverne flere eller færre hints til løsning af det problem, der arbejdes med.

Eleverne får mulighed for at få egne oplevelser og erfaringer med det faglige indhold, således at matematiklæringen bliver en integreret del af deres personlige udvikling og dannelse. Arbejdsmetoden danner grundlag for større fordybelse. Den giver eleven anledning til at reflektere over processen og fremmer forståelse frem for udenadslære, og den giver mulighed for at tage udgangspunkt i den enkelte elevs faglige styrker.

Som en form for metalæring udvikler eleverne deres egen forståelse af og holdning til, hvad matematik er: Fra *at huske at gøre* til *at tænke og finde ud af*.

Sammenfatning

Elever skal møde nye begreber i matematik gennem simple eksperimenter. Filosoffen Kant udtalte: “Mennesket erkender Verden med sanserne og fornuften” og “Al viden starter med en sanseerfaring”.

Hvis vi tager udgangspunkt i Kants ord, så må eksperimenteren være en naturlig del af matematikundervisningen. Den fører til forundring og lyst til at vide. Eksperimenteren i matematik inviterer til gruppearbejde og dermed til kommunikation om matematiske begreber.

Eleverne bliver sendt på en opdagelsesrejse. De må indimellem kastes ud, hvor de ikke kan bunde, men hvis de kommer op igen, kan det føre til stor lykkefølelse, forundring og lyst til at lære mere.

Den eksperimentelle arbejdsmetode er ofte mere tidskrævende end den traditionelle, så i praksis må man udvælge nogle stofområder, der er særlig velegnede til at arbejde på et eksperimentelt grundlag.

Til refleksion

Når man som lærer skal vælge undervisningsmetode, fx i forbindelse med introduktion af et nyt begreb, skal man så vælge at tage udgangspunkt i et konkret eksperiment, en undersøgelse ved brug af et dynamisk computerprogram (begge induktive indgange), eller skal man bruge en deduktiv tilgang?

Et forslag kunne være, at matematikfagteamet på et bestemt klassetrin går matematikbogen og læseplanen for det på gældende år igennem og diskuterer, hvilke emner der egner sig til hvilke tilgange. Hvilken metode egner sig eksempelvis bedst, hvis man skal:

a. introducere løsning af førstegradsligninger?
b. introducere sandsynlighedsregning?
c. arbejde med reduktion af algebraiske udtryk?

d. arbejde med trekantsgeometri?
e. arbejde med symmetrier og mønstre?

Fx kunne man, hvis man skal undervise i løsning af førstegradsligninger, og efter man har diskuteret ligevægtsprincippet, anvende et CAS program.

Derved lærer eleven, at hvis der i ligningen fx står 3x og man skal finde x, så nytter det ikke noget at trække 3 fra på begge sider af lighedstegnet, man kommer ikke tættere på løsningen herved.

Programmet får eleven til at gøre sig nogle erfaringer, også hvis han eller hun foretager sig noget uhensigtsmæssigt.

$3\cdot x-8=7$	$3\cdot x-8=7$
$(3\cdot x-8=7)+8$	$3\cdot x=15$
$\frac{3\cdot x=15}{3}$	$x=5$

CAS-eksempel

Dette er ikke en eksperimentel anvendelse af computerprogrammet, man bruger heller ikke dynamikken i programmet, men man bruger det til *at lære af sine fejl*.

Refleksion

★ Tænk over, hvordan man kan opstille et problem, som lægger op til at eleven, efter at have løst problemet, bliver inspireret til at stille nogle nye spørgsmål.

Hvis man fx har bedt eleverne om at finde et udtryk for vinkelsummen i en trekant, så vil nogle elever måske spørge sig selv om, hvad vinkelsummen i en firkant er og måske derefter begynde at undersøge, om der findes en generel sammenhæng mellem antallet af vinkelspidser i en polygon og vinkelsummen af polygonen.
Måske vil de endda blive interesserede i at undersøge, om reglen også gælder for konkave polygoner.

Litteratur

H.J.Beck, M.Vedelsby m.fl. (2012) *Matematik for lærere*, Grundbog 3, Gyldendal

Referencer:

1A) M.Vedelsby: kap. 20: *Det matematiske modelbegreb.*

1B) M.Vedelsby: kap.24: *Visualisering i matematik.*