Abstract

I procesorienteret matematikundervisning er der sat fokus på kommunikationen omkring løsningsprocessen og formidlingen af resultaterne frem for fokus på facit.

Grundideen er at skabe et forum for diskussion af forskellige løsningsmuligheder samt fordele og ulemper ved forskellige metoder. Det centrale er, at kommunikationen er forståelig for alle parter.

Det betyder, at såvel afsendere som modtagere skal være indstillede på at kommunikere bedst muligt. Kommunikationen kan være mundtlig, skriftlig, via computer, tavle, video, CAS-program eller hvad, der er bedst i den aktuelle situation.

Forfatter
Karsten Enggaard
Chefkonsulent på Forlaget Matematik (Danmarks Matematiklærerforening)
Matematiklærer i folkeskolen 1971-2005
Pædagogisk konsulent fra 1978 bl.a. DLH og UVM

Udgivelser

Konsulent/forfatter på materialer til matematik i grundskolen
herunder det digitale CAS-værktøj MatematiKan og onlinematerialet PRØV!.
Medtilrettelægger af Danmarks Matematiklærerforenings
opkvalificeringsindsats i it og matematik for lærere
i grundskolen 2016/17

Kapitel 1

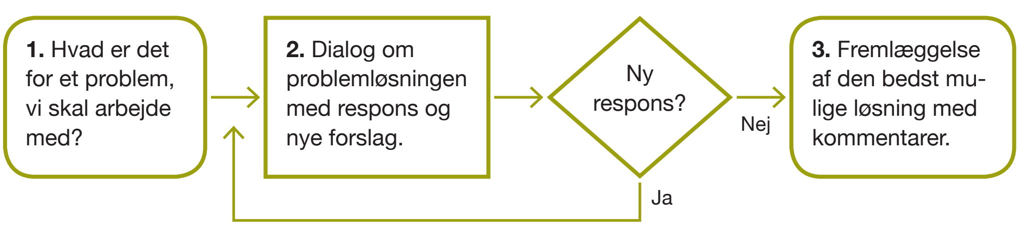
Procesorienteret matematikundervisning

Procesorienteret matematikundervisning er en undervisningsform, der med udgangspunkt i løsning af problemer stiller nogle bestemte krav til elev- og lærerrollen. Eleven skal være en aktiv deltager i løsningsprocessen og bidrage med forslag i stedet for at være modtager af en række standardiserede løsninger, der indgår som en del af pensum i matematik. Det nødvendiggør, at læreren bliver en aktiv og kritisk deltager i kommunikationen om løsninger til opgaver og matematiske problemstillinger. Dette i modsætning til den lærerrolle, hvor læreren fremstår som eksperten, der kender de korrekte standardiserede løsninger på de typer af problemer, vi p.t. beskæftiger os med.

En søgende og spørgende adfærd hos lærer og elever er en vigtig del af kommunikationen i den procesorienterede problembehandling og matematikundervisning.

Der findes ikke forkerte svar eller dårlige spørgsmål. Alle svar og alle spørgsmål er en del af processen frem mod en total forståelse af problemet, løsningsmuligheder og resultater.

Når elever arbejder procesorienteret, er der tre hovedelementer i processen.



1. En indledende fastlæggelse af, hvad problemet er.
   Introduktionen til opgaven kan være mere eller mindre åben, men indeholder ofte en forklarende tekstdel, en beskrivelse af betingelser for problembehandlingen og/eller krav til løsningen.
2. Dialog mellem lærer/elev og elev/elev om, hvordan vi løser problemet.
   Der kan være tale om flere delprocesser, løsningsforslag, responser, nye forslag.

3. Det bedst mulige resultat, et facit, en løsning, og måske kommentarer til resultatet.
Hvis processen har været forholdsvis simpel, er der selvfølgelig ingen særlige kommentarer, men hvis processen har indeholdt overvejelser, og der er foretaget valg, der har betydning for løsningen og resultatet, skal det fremgå.

Eksempel 1 — Begyndertrin

Opgave 1

Vida får penge af sin mor.
Hvor mange kroner får hun i alt?

________________ kr.

Først to femmere

5 kr + 5 kr

10 kr

Der er 2 femmere to gange

10 kr + 10 kr

20 kr

Det giver 20 kr.
Så er der tre 2-kroner

2 kr + 2 kr + 2 kr

6 kr

Ialt

20 kr + 6 kr

26 kr

CAS: MatematiKan

Opgave 1 kan løses på forskellige måder.

★ Er der måder, der er 'smartere' end andre?

★ Hvilken måde er bedst for dig – og hvorfor det?

Opgave 5

Indsæt de rigtige svar:

17 + 17 = 34

17 + $\square$ = 35

17 + $\square$ = 36

17 + $\square$ = 45

17 + $\square$ = 46

★ Kom med forslag til, hvordan Opgave 5 kan løses.

★ Ved hovedregning.

★ Med CAS-værktøj.

Eksempel 2

Mellemtrin

Opgave 1

Karla og Oskar har 50 kr. i alt.
Men Karla har 12 kr. mere end Oskar.
Hvor mange kr. har Karla?

Først får Karla 12 kr.

In[1]:= **50 kr – 12 kr**

Out[1]= 38 kr

Der er så 38 kr. tilbage, som skal deles mellem Oskar og Karla.

In[2]:= **38 kr / 2**

Out[2]= 19 kr

Oskar har derfor 19 kr., og Karla har også 19 kr.+12 kr.

In[3]:= **19 kr + 12 kr**

Out[3]= 31 kr

Karla har 31kr.

CAS: MatematiKan

★ Hvilke andre løsningsforslag vil elever på mellemtrinnet foreslå?

Opgave 3

- Til klassefesten køber klassen tre kasser sodavand til 69,95 kr. pr. kasse med 30 sodavand i hver kasse.
- De sælger sodavand til festen og vil gerne have et overskud på 150 kr. til klassekassen.

Hvad skal en sodavand koste, hvis de regner med at sælge cirka 75 sodavand?

★ Kom med mindst to forslag til, hvordan Opgave 3 kan løses med et CAS-værktøj.

Eksempel 3 — Sluttrin

- ★ Kom med forslag til, hvilke forklaringer og argumenter, der vil være karakteristiske for elever i 7.–10. klasse, når de skal forklare, hvordan de vil løse opgave 1.
- ★ Hvordan vil du selv løse opgaven?
- ★ I denne opgave er du nødt til at afgøre, hvilken pris du vil betale for et mobilabonnement pr. måned.
  1. I de resterende 18 måneder, hvis du tager det første tilbud.
  2. I 24 måneder, hvis du vælger tilbud 2.
- ★ Opgaven er et eksempel på, hvordan dine valg af data i forbindelse med opgaveløsningen har indflydelse på, hvilket resultat du når frem til.
- ★ Kom med mindst et løsningsforslag i et CAS-værktøj.

Opgave 1

1 Der er tilbud på Samsung Galaxy S5.
- Den koster 200 kr. i udbetaling og 150 kr. om måneden i 24 måneder.
- Du binder dig til et mobilabonnement til 299 kr. pr. måned i mindst 6 måneder.

2 Et andet tilbud er 4999 kr. kontant.

Vælg et af de to tilbud og begrund dit valg.

- ★ I opgaver af samme type som opgave 4 er det selvfølgelig begrænset, hvor megen *proces* der kan lægges ind i løsningen, hvis du bruger et CAS-værktøj.
  Men det giver god mening at diskutere og vise, hvordan du bruger CAS-værktøjet, når du skal indtaste opgaverne. Og hvilke indtastningsmetoder, der er hensigtsmæssige.
- ★ Vær særlig opmærksom på de blandede tal.
- ★ Tjek, hvordan forskellige programmer, håndterer blandede tal.

Opgave 4

Find det rigtige svar:

$20 + 300 + 5 =$	179,15
$2\sqrt{5} - \sqrt{20} + \sqrt{1} =$	325
$2\pi + \frac{\pi}{2} - 3{,}5\pi + \pi =$	1
$3{,}1 + 34 + 142{,}05 =$	180,15
$23\frac{1}{10} + 47 + 110\frac{1}{20} =$	181,125
$114\frac{5}{8} + 35{,}375 + 31\frac{1}{8} =$	0

Eksempel 1-3 er fra en række små hæfter, som Forlaget Matematik er ved at producere.
P.t. er der hæfter omhandlende de faglige områder tal og algebra, statistik og sandsynlighed, funktioner og ligninger.

It-programmer til procesorienteret matematikundervisning og problembehandling

Procesorienteret matematikundervisning giver det bedste udbytte, hvis eleverne arbejder med dynamiske programmer, det vil sige programmer, der giver mulighed for at undersøge matematikken. At undersøge kan være at eksperimentere med forskellige indtastninger og i samme øjeblik se og vurdere de forskellige resultater, man umiddelbart kan se på skærmen.

Dynamiske programmer er programmer som regneark, hvor cellerne udnyttes aktivt til at beregne værdier. Det er geometriprogrammer, hvor der kan trækkes og ændres i konstruktionerne, så eleverne kan forsøge sig frem mod en løsning, og det er matematikskriveværktøjer (CAS-programmer), der både kan regne numerisk og algebraisk, og hvor formler, funktioner og andre matematiske udtryk kan indtastes og beregnes direkte på skærmen, så det er muligt at eksperimentere sig frem mod en løsning gennem overvejelser og nye indtastninger. Resultater kan formidles som tekst, skemaer, grafer og diagrammer suppleret med billede og lyd.

Et matematisk skriveværktøj fremmer opfattelsen af, hvordan det at producere en tekst og det tilhørende matematiske udtryk samt at finde en løsning/et resultat, er en sammenhængende proces. En proces, der begynder med overvejelser om, hvordan du vil arbejde med problemstillingen/opgaven, det vil sige en disponering af arbejdsforløbet og nogle valg. Dernæst skrivning af tekst, der forklarer, hvad man skal finde ud af, og hvad man vil gøre. Så følger matematiske udtryk, der kan give resultater og løsninger. Den proces gentages det antal gange, det er nødvendigt for at opnå det bedst mulige resultat. Dernæst følger en redaktionel bearbejdning af resultaterne, der redegør for, hvad man er nået frem til, og hvilken betydning det har. Et brugbart CAS-værktøj bør indeholde en tekstbehandlingsdel til nemt at skrive de nødvendige tekster. Desuden bør den indeholde matematikdel, der både kan skrive matematik og beregne, samt en mulighed for at præsentere løsningerne i en sammenhæng mellem teksterne og de matematiske beregninger.

Et almindeligt tekstbehandlingsprogram er ikke nødvendigvis velegnet til løsning af matematiske problemstillinger. Det kan tekstkommunikere omkring løsningen. Matematiske tegn og udtryk kan skrives med større eller mindre besvær, og det er ikke muligt at evaluere, det vil sige udregne, disse udtryk. Der er dermed tale om en tekstdel, der kan ændres dynamisk, mens matematikdelen ikke kan ændres dynamisk. At et tekstbehandlingsprogram indeholder almindelige layout og redigeringsmuligheder, gør det ikke nødvendigvis egnet til procesorienteret matematikundervisning.

Der findes programmer, der delvis opfylder kravene om mulighed for tekstbehandling, layout og præsentation af løsninger samt skrivning af matematik og beregning. De kan selvfølgelig benyttes til en procesorienteret matematikundervisning. De er blot ikke ideelle. At skulle skifte mellem forskellige programmer, kopiere og indsætte hver gang, der er et nyt forslag eller et nyt forsøg på en løsning, er alt for omstændeligt. Det skal være nemt for eleverne at rette, ændre, komme med forslag til løsninger og umiddelbart se resultater.

Fra procesorienteret opgaveløsning til procesorienteret problembehandling

Procesorienteret opgaveløsning indebærer, at eleverne skal udarbejde egne opgaveløsninger og opgaveløsninger i samarbejde med andre. I dette forløb er det væsentligt, at læreren støtter processen med aktiviteter før, under og efter arbejdet med opgaveløsningen.

Eleverne skal have hjælp med deres forberedelse (forståelse af opgaven og dens sammenhænge), deres formulering (valg af værktøj, matematiske begreber og symboler) og efterfølgende hjælp med eventuelle forbedringer af løsningen.

Et væsentligt element i den procesorienterede opgaveløsning er, at eleverne benytter hinanden som sparringspartnere og giver respons på hinandens kommunikation omkring opgaveløsningen og selve løsningen. Dette kan eleverne selvklart ikke gøre konstruktivt og fremadskridende uden en grundig forudgående introduktion og med en passende grad af øvelser. Det er vigtigt, at læreren deltager i responsfasen og giver eleverne konkrete anvisninger på, hvorledes der kan kommunikeres omkring opgaveløsningen.

Arbejdet med responsen skal tilrettelægges efter den enkelte elevs forudsætninger, altså på en sådan måde, at der fortrinsvis holdes fokus på et enkelt løsningselement ad gangen. Det kræver lærerinvolvering. Sparringen skal gives i en vekselvirkning mellem kammeratsparring og lærersparring.

Ofte skal en opgave ikke løses fra ende til anden, men opdeles i faser, hvor eleven forholder sig til en fase ad gangen.

Den procesorienterede opgaveløsning er en måde at arbejde med at løse opgaver på, der er forholdsvis simple i deres opbygning. Den giver samtidig mulighed for, at eleverne får indsigt i regnemetoder, hierarkier og enkle løsningsmodeller.

Problemløsning – problembehandlingskompetencen

Problemløsning og beherskelse af problembehandlingskompetencen omfatter de kendte og øvede problemer og matematiske discipliner som ligningsløsning, brøkregning, procentregning, indsættelse i formler og de efterfølgende beregninger med videre, der er delelementer i Fælles Mål. Desuden omfatter problembehandlingskompetencen arbejdet med at løse matematiske problemer, der er af en mere sammensat og kompleks natur.

Formålet med at arbejde procesorienteret med problembehandling er at gøre eleverne bedre til og mere bevidste om problemløsning. De lærer at sammensætte den viden, de har om matematik og problemløsning, så de kan bruge den på andre og nye problemer og i andre sammenhænge end dem, hvor den indtil nu har være brugt.

Udfordringen for læreren er løbende at udsætte eleverne for ukendte, men håndterbare problemstillinger og undersøgelseslandskaber, der lader eleverne se/opdage/erkende, at den matematik og de løsninger, de kender, kan de bruge her. Det betyder, at værdisættelsen ikke kun ligger i at nå et resultat. Den ligger først og fremmest i den undersøgende adfærd og afprøvningen af forskellige måder at nå frem til en løsning på. Og ikke mindst i diskussionerne om, hvad der så er gode løsninger.

Første fase er en forberedelses- og planlægningsfase, hvor eleverne får hjælp til at få ideer og komme i gang med den konkrete problembehandling. Det handler også om begrebsafklaring og forståelse for den kontekst, hvori problemet indgår.

For mange elever er forberedelsesfasen den sværeste. Måske har de en ide, men de har svært ved at få den struktureret og udfoldet. Forberedelsesfasen skal derfor tages alvorligt og prioriteres tidsmæssigt. Forberedelsesfasen veksler mellem at foregå individuelt, i grupper eller fælles i klassen.

De fleste elever, der bliver præsenteret for et problem, forsøger at koble problemet til kendte løsningsstrategier og metoder. Hvis de på en eller anden måde kan se noget kendt i problemet, forsøger de at løse det med den metode, der passer til det, de genkender.

Hvis man spørger dem om, hvad de gør, når de løser problemet, kan svaret være: “det er en ligning, og den løser jeg, som jeg plejer”, “det ved jeg ikke, jeg prøvede mig lidt frem” eller “jeg regnede det bare ud”.

Den procesorienterede tilgang går netop ud på, at eleverne bliver bevidste om og bedre til at beskrive, hvad de selv gør, og hvad andre gør i en problemløsning. Eleverne skal opbygge en større erfaringsbase som grundlag for at finde forskellige tilgange til at løse matematiske problemstillinger.

Hvordan løser du et problem?

Eksempel 4

Fra PRØV! – mundtlig øvetema 'En rejse til en stjerne'

Solen er ca. 150 mio. km fra Jorden.
Den nærmeste anden stjerne er ca. fire lysår fra Jorden.

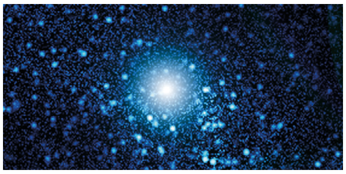
Et lysår er den afstand lyset bevæger sig på et år.
Lyset bevæger sig med 300 000 km/s.

Et rumskib skal bevæge sig med mindste 11 km/sek. for at kunne forlade Jorden.

Ingeniører arbejder på at udvikle et rumskib, der kan bevæge sig med 1000 km/s.

Undersøg, om den fart er tilstrækkelig for, at et menneske kan komme til en stjerne fire lysår fra Jorden.

★ Overvej, hvordan du vil løse problemet.
Neden for er vist et løsningsforslag. Det er en velkendt metode, og den giver det korrekte resultat.
Men måske er den lidt besværlig?



Løsningsforslag

Rejsetiden fra Jorden til de fjerne planeter for et rumskib, der bevæger sig med 1000 km/s, kan beregnes ved at udregne, hvor langt der er til stjernen 4 lysår fra Jorden og efterfølgende dividere med 1000 km/s. Så har du rejsetiden i sekunder, der kan omregnes til år.
Altså afstand fra jorden til stjernen:
antal år · antal dage · antal timer pr. døgn · antal minutter pr. time · antal sekunder pr. minut · lysets hastighed pr. sekund = $4 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 300\,000$ km

Dette tal skal så divideres med rumskibets fart og omregnes til år. Altså divideres med farten, som er = 1000 km$\cdot 60 \cdot 60$ km/t. Det giver et tal, der skal divideres med $24 \cdot 365$ for at finde antal år.

★ Tænk over, om der er andre måder at løse problemet på.
Og kik så i noterne sidst i bogen.

Ligeledes er det af betydning, at eleven er motiveret og har interesse for at arbejde med opgaven. Høj grad af motivation er ofte sammenhængende med tydelige læringsmål, så eleven ved, hvad han eller hun er ved at lære, og hvordan han eller hun kan arbejde for at nå målet.

De indledende overvejelser om, hvordan opgaven skal løses, kan forløbe på yderst forskellige måder. For nogle elever vil det være en fordel at diskutere og drøfte hvordan opgaven skal løses, med andre elever eller med en lærer. For andre elever vil det være en fordel at arbejde mere selvstændigt med opgaven.

Andre har brug for en indgang til opgaven, hvor der bliver arbejdet med blyantsskitser og andre skriblerier, før der bliver brugt et digitalt værktøj. Ligeledes kan andre mindre skriftlige overslag være grundlag for den efterfølgende egentlige opgaveløsning. Også her kan der selvfølgelig være brug for en diskussion.

Systematisk problembehandling – en guide

Der findes flere forskellige metoder til en mere systematisk problemløsning.
I "Teaching Mathematics to Middle School Students with Learning Difficulties" (The Guilford Press) er der forslag til en sådan systematisk fremgang.

Forfatterne anbefaler:

1. Når du læser teksten:
- Er der ord, jeg ikke forstår?
- Er der matematikord i teksten, og er jeg helt klar over, hvad de betyder?
- Læs højt for din makker og diskuter med hinanden, hvad problemet/opgaven er.

2. Gentag teksten for dig selv og find ud af:
- Hvilke oplysninger er vigtige?
- Hvad skal jeg finde ud af?
- Hvilke fakta er der i teksten?

3. Læg en plan for, hvordan du vil løse opgaven:
- Hvad skal jeg gøre først?
- Hvad er de næste ting, jeg skal gøre?
- Hvad tror jeg, resultatet vil være – cirka?

4. Når du skal bruge computer til at løse opgaven:
- Hvilke trin skal jeg igennem på computeren?

a Lille forklarende tekst
b De tal, der skal regnes
c Hvad er resultatet, og hvad betyder det?

5. Tænk over resultatet:
- Ser det ud til at være et fornuftigt resultat?
- Passer det med, hvad du havde tænkt på forhånd?

Det kan være svært

For nogle elever er problemer i en sproglig kontekst vanskeligere end de rene talproblemer.

Her kan det hjælpe at øve sig på situationer, hvor 'problemet' er løst, og så finde spørgsmålet.

Eksempel 5

Linea har 9 billeder på sin mobil fra denne uge.
Andreas har 3 gange så mange billeder som Linea på sin mobil.
Svar: Andreas har 27 billeder.
(Spørgsmålet er: Hvor mange billeder har Andreas på sin mobil?)

Julie har bagt 28 små kager sammen med sin far.
Peter har bagt halvt så mange kager med sin mor.
Svar: Peter har bagt 14 kager.
(Spørgsmålet er: Hvor mange kager har Peter bagt?)

Divino har fundet 80 pokemons. Det er fire gange så mange som Rufus.
Svar: Rufus har fundet 20 pokemons.
(Spørgsmålet er: Hvor mange pokemons har Rufus fundet?)

Sammenfatning

For mange elever er det svært at formulere sig, om noget andre har skrevet, og at modtage kritik for det, de selv har skrevet. De har ofte vanskeligt ved at håndtere kritik og føler, at der er meget på spil, når de selv skal give respons til en kammerat. De kan savne et sprog at formulere sig i. Læreren bør fokusere på disse situationer og hjælpe eleverne til at udvikle nogle redskaber, der sætter dem i stand til at inddrage responsfasen som en naturlig del af opgaveløsningen. Der kan i starten være konkrete responsspørgsmål, som er formuleret og nedskrevet.

Der eksisterer i hovedsagen to typer af matematiske problemer. Der er opgaver, som kun består af tal, bogstaver og matematiske tegn, og der er opgaver, som afspejler en mere sammensat situation, det vil sige mange data, sproglige forklaringer, billeder og tegninger samt ting, der skal tages hensyn til. Endelig skal resultatet måske bruges til at overveje nogle løsningsmuligheder. Altså en opgavetype, hvor det hele eller næsten det hele er fastlagt på forhånd, og en anden opgavetype, der er karakteriseret af forskellige grader af valg, der skal foretages i løbet af løsningsprocessen.

Det mere enkle problem, der ofte har en standardløsning

Denne type af problemer giver sjældent anledning til mange diskussioner om de sproglige forklaringer i forbindelse med problemet og dets løsning. Diskussioner, knyttet til denne problemtype, drejer sig ofte mere om fx matematisk syntaks, valg af løsningsmetode og valg af, hvordan og i hvilken grad det er nødvendigt at forklare, hvorledes man er nået frem til resultatet.

Hvis problemet er 'pakket ind' i en tekst, vil der være behov for en tekst, der forklarer, hvad løsningen er svar på.

Det er et krav, at den matematiske syntaks er korrekt. Det vil sige, at regningsarternes hierarki, brug af parenteser, lighedstegn, regnetegn (+, -, ·, :) og brug af benævnelser er korrekt anvendt.

Når man arbejder med de mere enkle problemstillinger vil det ofte være nødvendigt at vælge mellem computer med tilhørende programmer og manuel udregning med papir og blyant eller kombinationer af disse. Computeren giver den fordel, at det er nemt at rette og tilpasse undervejs i procesforløbet.

Valg af udregningsmetode og -redskab afhænger af, hvad resultatet skal anvendes til. Det giver næppe mening at udregne arealet af midtercirklen på en håndboldbane med 1 000 000 betydende cifre. Men et valg af en værdi for π med to eller tre decimaler, hvis omkredsen af en fingerring skal beregnes i cm, kan være ganske fornuftig. Det vil sige, at valgene afhænger af den situation, hvori resultatet skal anvendes. Normalt vil guldsmeden måle omkredsen af fingeren med højst to betydende cifre. Dermed bliver resultatet ikke mere præcist ved at angive det med fx tre eller fire cifre. Selvom man måske kunne ønske det som guldsmed.

I kommunikationen omkring opgaven og dens løsning kan det være nødvendigt at redegøre for sådanne overvejelser.

Den procesorienterede opgaveløsning af denne type opgaver drejer sig således om at optimere netop syntaks, benævnelser, samt tydeliggørelse af eventuelle valg, herunder fx antal decimaler i udregninger og resultat.

I denne type af opgaver er der ligeledes forskel på kravene til udfoldningen af løsningen afhængigt af det niveau, der arbejdes på.

Elever, der er ved at lære reduktion af sammensatte algebraiske udtryk, vil naturligt møde et krav om at udfolde alle små trin i en løsning. Elever, der forventes at kunne løse sådanne udtryk, vil møde et krav om korrekte resultater og en forventning om, at mellemleddene er i orden.

Den sidste gruppe af elever vil derfor også med rimelighed kunne benytte CAS-værktøjer til at foretage sådanne reduktioner. Disse elever har nemlig selv værktøjerne til at løse sådanne udtryk. Deres diskussion går på valg af værktøj. Modsat dette vil den første gruppe af elever skulle vise, hvilken grad af kendskab de har til løsning af algebraiske udtryk.

De mere sammensatte problemstillinger, der ofte kan løses på flere måder

Denne type af opgaver omfatter en mere sammensat proces, hvor der ofte skal foretages flere valg.

Her skal eleven forholde sig kritisk til de forelagte data og vide, hvorledes de valg han eller hun foretager, kan have indflydelse på resultatet af de efterfølgende udregninger.

Det endelige resultat og de handlinger og beslutninger, der eventuelt skal foretages på grundlag af resultaterne, er selvfølgelig under indflydelse af de foretagne valg. Andre valg kunne have givet andre resultater.

Denne proces og de foretagne valg skal tydeligt fremgå af kommunikationen i forbindelse med opgaveløsningen.

Valg af lånetype til finansiering af bolig er et glimrende eksempel på, hvorledes en lang række af valg har indflydelse på, hvilken type lån man får.

Køb på afbetaling, hvor der skal vælges mellem forskellige afdragsmodeller, er et andet eksempel.

Lægning af fliser på en terrasse, hvor der kan vælges mellem forskellige flisetyper til forskellige priser, som kan lægges på forskellig tid og i forskellige mønstre, er et tredje eksempel.

Den procesorienterede opgaveløsning af denne type opgaver drejer sig således om at optimere valgene undervejs i udregningerne og kunne begrunde disse valg. Efterfølgende skal de opnåede resultater indgå i begrundelsen for en eventuel handling eller det endelige valg.

Kravene til kommunikationen omkring sådanne opgavetyper er, at valg og proces skal fremgå tydeligt af kommunikationen. Processen vil ofte kunne illustreres gennem opstillingen af formel, ligning, funktion, diagram, tabel, tegning, algoritme samt de tilhørende resultater. Derimod kræver valg en forklaring, gerne med argumenter for netop dette valg.

Differentieringsmuligheder

Det er altid vigtigt at have mulighed for at differentiere undervisningen. I procesorienteret matematikundervisning er det forholdsvis nemt at differentiere. Læreren kan ændre på kravene til den enkelte elev, kræve flere eller færre løsninger, kræve større eller mindre præcision, kræve uddybende eller mere simpel løsningsbeskrivelse og ikke mindst ændre på de data, der indgår i problemstillingen eller i opgaven. Ofte kan man med fordel udarbejde to eller tre variationer af det samme problem.

I responsarbejdet ligger der gode muligheder for at differentiere. Nogle elever har brug for ganske få og meget detaljerede kommentarer for overhovedet at komme videre, mens der til andre kan stilles større og mere komplekse forslag til deres opgaveløsninger. Selv om eleverne giver hinanden respons, vil det forbedre opgaveløsningen yderligere, at læreren også giver respons.

Fra procesorienteret opgaveløsning til procesorienteret matematikundervisning

Som lærer kan man lægge op til og vise eleverne, hvordan den procesorienterede opgaveløsning fungerer og understrege de fordele, der er ved at løse opgaver på den måde.

Den procesorienterede opgaveløsning bliver til procesorienteret matematikundervisning, når den arbejdsform bliver den bærende arbejdsform i de færdighedsprægede træningsopgaver, i tekstholdige opgaver og problemstillinger eleverne arbejder med i både skriftlige og mundtlige sammenhænge.

Og ikke mindst når nye stofområder skal indtages og beherskes. Det at kunne gå på opdagelse i nye områder af matematikken på en undersøgende måde, hvor små og store tanker bliver en del af klassens fælles forståelse af, hvad det nye indeholder af muligheder, er procesorienteret matematikundervisning.

Velkendte indholdselementer som skriftlige opgaver, der afleveres og rettes, test og prøver af forskellig karakter, får en anden rolle, hvis de indgår som elementer i procesorienteret matematikundervisning. En gennemført test eller en afleveret skriftlig opgave er ikke færdigbehandlet, før den er løst bedst muligt til gensidig forståelse af fagligt indhold og de fremkomne resultater.

Dermed kan slutproduktet udsat for hele processen indgå som en ægte og brugbar del af elevens egen portefølje.

Til refleksion

For nogle år siden havde jeg matematik i min 3. klasse, og den dag skulle eleverne arbejde med en grubler, jeg havde fundet på nettet, bearbejdet en anelse og oversat til dansk

Jeg læste grubleren op for dem.

En ung knøs boede i en landsby lidt ude på landet. Han havde et stort ønske om at blive rig. Alle sagde til ham, at han skulle få et arbejde eller lave en aftale med trolden, der boede under broen over åen.

En dag gik han langs vejen hen mod broen og tænkte på at blive rig. Men han troede ikke, at trolden kunne hjælpe ham.

Næppe havde han tænkt den tanke, før trolden dukkede frem fra broen over åen.

– *Nå, så du vil være rig, sagde trolden.*

Knøsen nikkede.

– *Alt, hvad du skal gøre, er at gå over broen over åen. Hver gang du gør det, vil pengene i din lomme blive fordoblet.*

Knøsen skyndte sig hen mod broen; men trolden stoppede ham.

– *Siden jeg er så flink ved dig, synes jeg, du skal give mig lidt for min ulejlighed.*

– *Vil du give mig 8 dalere, hver gang du passerer broen?*

Knøsen indvilgede og skyndte sig over broen.

Han stak hånden i lommen, og som ved trylleri fandt han, at hans penge var blevet fordoblet.

Han kastede 8 dalere til trolden og skyndte sig endnu en gang over broen. Det samme skete, pengene fordoblet, og han kastede 8 dalere til trolden.

Da han tredje gang passerede broen, blev hans penge igen fordoblet, men da han havde betalt trolden de 8 dalere, havde han ingen penge tilbage.

Trolden lo og forsvandt.

Hvor mange penge havde knøsen til at begyndte med?

Min historie går nu på, at næppe havde jeg læst færdig, faktisk før jeg fik stillet spørgsmålet, sad to elever ivrigt og viftede med hånden oppe, mens de begge sagde: “Jeg ved godt, hvor mange penge han havde, da han begyndte”.

Se, det var rimeligt kvikt tænkt, så de fik besked på lige at vente lidt.

– *Er der nogen, der har spørgsmål til historien?*

Der var to, der gerne ville sige noget. En spørger, hvad en knøs er. Det får vi så klaret. En anden synes, vi skal aftale om en daler er en mønt eller to-kroner.

Vi bliver enige om, at de blot skal regne med dalere som mønter. Ellers ingen spørgsmål, og klassen går i gang.

De to, der havde svaret så hurtigt, skal forklare på flip-over, hvordan de er nået frem til resultatet. De andre i klassen går parvis i gang, og efter ca. 10 minutter har alle makkerpar et bud på svar.

Nogle tegner med pile over en å og små udregninger. Andre bruger centicubes og forsøger sig frem. Men alle når frem til et rigtigt svar.

Refleksion 1

★ Hvordan vil du løse grubleren?

Da lektionen er slut, har jeg fri og gør klar til hjemtur. I det fjerne dukker skolens souschef op med A4-ark i hånden. Det tyder på vikartimer. Og ganske rigtigt, Lis er blevet syg.

– *Om jeg kan tage 8. klasse i matematik de næste to timer?*
– *Hvad skal de arbejde med?*
– *Ligningsløsning.*
– *Fint, jeg er forberedt.*

8. klasse får nøjagtig samme oplæsning, som 3. klasse.
Ingen spørgsmål. Ingen hurtige svar.
20 minutter senere – stadig ingen forslag til løsninger.

Refleksion 2

★ Hvordan vil du forklare forskellen mellem de to klassers tilgang til problemløsning i dette tilfælde?
★ Hvad tror du, er grunden til, at 8. klasse ikke kan løse problemet?

Refleksion 3

★ Hvordan vil du hjælpe 8. klasse med at løse grubleren?
(når du har reflekteret, så se evt. noter til Refleksion 3 sidst i bogen)

Refleksion 4

★ Hvordan kan du forholdsvis enkelt differentiere grubleren?

Grubleren med knøsen og trolden kan løses på mange måder.

Eleverne i 8. klasse forsøgte at opstille ligninger og så løse dem.

En mere overordnet tænkning vil tage udgangspunkt i, at selv om pengene bliver fordoblet, så får knøsen færre og færre ved hver udbetaling af 8 dalere efter fordobling.

Hvis han havde haft netop 8 dalere i lommen, kunne han have fortsat i det uendelige uden at blive hverken rigere eller fattigere.

Til dette kapitel findes noter bagerst i bogen.

Litteratur

Teaching Mathematics to Middle School Students with Learning Difficulties,
Marjorie Montague og Asha K. Jitendra,
Guilford Press 2006. ISBN: 978-15-93853-06-8

Gode Grublere og sikre strategier,
Pernille Pind, Forlaget Pind og Bjerre, 2010. ISBN: 978-87-92435-05-7

MatematiKan – Kom godt i gang Mellemtrinnet,
Karsten Enggaard, Forlaget Matematik ApS., 2012. ISBN: 978-87-92637-04-8

MatematiKan – Kom godt I gang Ældste trin,
Finn Egede Rasmussen og Carl Anker Damsgaard,
Forlaget Matematik ApS., 978-87-92637-05-5

PRØV! Oplæg til mundtlig matematik,
Jørgen Uhl Pedersen og Karsten Enggaard,
Forlaget Matematik ApS., ISBN 978-87-92637-31-4